§1. Понятие векторного (линейного) пространства, примеры. Подпространство, линейная оболочка. Арифметическое векторное пространство.

Напомним, что *бинарной операцией* на множестве M называется отображение из множества $M \times M$ во множество M. Иными словами, бинарная операция каждой упорядоченной паре элементов x, y из M сопоставляет некоторый элемент из M. Бинарную операцию обозначают обычно символами наподобие $+$, $\cdot$, $*$ и т. п.

Пусть M — некоторое множество, и пусть $\mathbb{R}$ обозначает множество действительных чисел.

Определение. *Линейным* (*векторным*) *пространством* V называется множество, на котором задана операция $+$, т. е. для любых элементов $x, y \in V$ определен элемент $x + y \in V$, а также для любых $\lambda \in \mathbb{R}$ и $x \in V$ определен элемент из V, обозначаемый λx, так что выполняются следующие условия (аксиомы линейного пространства):

1. $\forall x, y, z \in V \quad (x + y) + z = x + (y + z)$

   (ассоциативный, или сочетательный закон сложения);

2. $\forall x, y \in V \quad x + y = y + x$

   (коммутативный, или переместительный закон сложения);

3. существует такой элемент $\theta \in V$, что $\forall x \in V \;\; x + \theta = x$

   (существование нулевого вектора);

4. $\forall x \in V \; \exists y \in V \;\; x + y = \theta$

   (существование противоположных элементов);

5. $\forall x \in V \;\; 1x = x$;

6. $\forall x \in V \; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \;\; (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$;

7. $\forall x \in V \; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \;\; (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;

8. $\forall x, y \in V \; \forall \alpha \in \mathbb{R} \;\; \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

Элементы векторного пространства V называются *векторами*.

Примеры векторных пространств.

1. Числовая прямая $\mathbb{R}$ является векторным пространством относительно сложения и умножения на число.

2. Множество векторов на плоскости образует векторное пространство относительно сложения векторов и умножения векторов на число.

3. Множество многочленов с числовыми коэффициентами от переменной t образует векторное пространство относительно сложения многочленов и умножения их

на число. Векторное пространство также образуют многочлены, степень которых не превосходит фиксированного числа n. Однако все многочлены, имеющие фиксированную степень n, не образуют векторного пространства, т.к. сумма таких многочленов может иметь меньшую степень.

4. Множество функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$, образует векторное пространство, которое обозначается $C[a, b]$.

Рассмотрим простейшие свойства векторных пространств.

1. Аксиома 3 гарантирует существование такого вектора θ, что для любого $x \in V$ справедливо равенство $x + \theta = x$. По аксиоме 2 векторного пространства, $\theta + x = x$. Докажем единственность вектора θ. Предположим, что существуют два вектора θ_1, θ_2, удовлетворяющие аксиоме 3. Полагая $x = \theta_2$ в равенстве $x + \theta_1 = x$, получим $\theta_2 + \theta_1 = \theta_2$. Аналогично, полагая $x = \theta_1$ в равенстве $\theta_2 + x = x$, получим $\theta_2 + \theta_1 = \theta_1$. Следовательно, $\theta_1 = \theta_2$, что и требовалось доказать. Вектор θ называется *нулевым вектором* пространства V.

2. Пусть $x \in V$ таков, что $x + x = x$. По аксиоме 4, существует такой вектор $y \in V$, что $x + y = \theta$. Прибавим справа к обеим частям равенства $x + x = x$ вектор y. Получим $(x + x) + y = x + y$. Пользуясь аксиомой 1, напишем $x + (x + y) = x + y$. Тем самым $x + \theta = \theta$, откуда $x = \theta$ ввиду аксиомы 3. Поскольку $\theta + \theta = \theta$, мы можем заключить, что $x + x = x \Leftrightarrow x = \theta$.

3. Докажем, что для любого $x \in V$ выполняется равенство $0x = \theta$. Действительно, $0x = (0 + 0)x = 0x + 0x$, и по предыдущему пункту имеем $0x = \theta$.

4. Аксиома 4 гарантирует существование противоположного вектора для любого $x \in V$. Пусть для данного вектора x существуют такие векторы y и z, для которых $x + y = \theta$ и $x + z = \theta$. Прибавим к второму из равенств y слева и воспользуемся тем, что $y + x = \theta$. Имеем: $y + (x + z) = y + \theta$, откуда $(y + x) + z = y$, $\theta + z = y$, $z = y$. Таким образом, для любого вектора $x \in V$ существует единственный вектор, называемый противоположным вектором и обозначаемый $-x$, для которого выполнены условия $x + (-x) = (-x) + x = \theta$.

Особо отметим, что из $x + y = \theta$ следует $y = -x$.

5. Проверим, что $(-1)x = -x$. Действительно, $x + (-1)x = 1x + (-1)x = (1 + (-1))x = 0x = \theta$, следовательно, $(-1)x = -x$.

6. Можно определить операцию вычитание в пространстве V, полагая $x - y = x + (-y)$. Докажем, что $\forall x, y \in V$, $\forall \alpha \in \mathbf{R}$ выполнено равенство $\alpha(x - y) = \alpha x - \alpha y$. Имеем: $\alpha(x - y) = \alpha(x + (-y)) = \alpha x + \alpha(-y) = \alpha x + \alpha((-1)y) = \alpha x + (\alpha(-1))y = \alpha x + ((-1)\alpha)y = \alpha x + (-1)(\alpha y) = \alpha x + (-\alpha y) = \alpha x - \alpha y$, ч.т.д.

Закон ассоциативности сложения позволяет писать суммы без скобок. Например, для чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbf{R}$ и векторов x_1, x_2, …, x_n мы часто будем писать выражение вида $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n$, представляющее собой вектор и называемое *линейной комбинацией* векторов x_1, …, x_n с коэффициентами α_1, …, α_n.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть W — подмножество векторного пространства V. Если W само является векторным пространством относительно сложения и умножения на число, то W называется подпространством векторного пространства V.

Для того, чтобы непустое множество W являлось подпространством пространства V, необходимо и достаточно выполнение следующих двух условий:

1. Для любых векторов $x, y \in W$ вектор $x + y$ также принадлежит W (т.е. W замкнуто относительно сложения).

2. Для любых $x \in W$ и $\alpha \in \mathbf{R}$ вектор αx также принадлежит W (т.е. W замкнуто относительно умножения на число).

Рассмотрим несколько примеров подпространств.

1. Множество многочленов от переменной t есть подпространство в пространстве всех непрерывных функций, заданных на числовой прямой.

2. Множество векторов на плоскости есть подпространство в пространстве трехмерных векторов.

Особо рассмотрим пример подпространства, называемого *линейной оболочкой*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть V — векторное пространство, x_1, x_2, ..., x_k — векторы из V. Рассмотрим все элементы из V вида

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_k x_k, \text{ где } \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbf{R}.$$

Множество всех таких векторов обозначается $\mathcal{L}(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ и называется линейной оболочкой векторов x_1, x_2, ..., x_k.

ТЕОРЕМА *Пусть V — векторное пространство, W — линейная оболочка векторов x_1, x_2, ..., x_k. Тогда W является подпространством V.*

□ Проверим, что выполнены два условия, необходимые и достаточные для того, чтобы W было подпространством. Пусть даны два вектора x и y из $W = \mathcal{L}(x_1, x_2, \ldots, x_k)$. Проверим, что $x + y \in W$. По условию, можно записать $x = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k$, $y = \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_k x_k$. Тогда $x + y = \alpha_1 x + \ldots + \alpha_k x + \beta_1 x + \ldots + \beta_k x_k = (\alpha_1 + \beta_1)x + \ldots + (\alpha_k + \beta_k)x_k$ принадлежит W.

Пусть $\alpha \in \mathbf{R}$. Проверим, что $\alpha x \in W$. Действительно, $\alpha x = \alpha(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k) = (\alpha\alpha_1)x_1 + \ldots + (\alpha\alpha_k)x_k \in W$.

Итак, W замкнуто относительно сложения и относительно умножения на число, т.е. является подпространством в V. ■

Арифметическое векторное пространство $\mathbf{R}^n$.

Символом $\mathbf{R}^n$ обозначается множество строк вида $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, где α_1, α_2, ..., α_n — действительные числа. Определим понятия суммы строк и произведения строки на число. Положим

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) + (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n),$$

$$\alpha(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (\alpha\alpha_1, \alpha\alpha_2, \ldots, \alpha\alpha_n).$$

Упражнение. Проверьте, что $\mathbf{R}^n$ является подпространством относительно определенных выше операций.

Замечание. Аналогичным образом можно ввести пространство столбцов из чисел α_1, α_2, ..., α_n, которое устроено так же, как и пространство строк.

§2. Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов. Базис и размерность векторного пространства. Изоморфизм линейных пространств.

Определение. Пусть V — векторное пространство. Система векторов x_1, x_2, …, $x_m \in V$ называется *линейно зависимой*, если существуют числа α_1, α_2, …, α_m, не равные одновременно нулю, такие, что $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_m x_m = \theta$.

В противном случае система называется линейно независимой. Дадим отдельно определение для этого случая.

Определение. Система векторов $x_1, x_2, \ldots, x_m$ называется *линейно независимой*, если для любых $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in \mathbf{R}$ из условия $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_m x_m = \theta$ следует, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$.

Замечание. Пустую систему векторов по определению будем считать линейно независимой.

Пример. В пространстве $\mathbf{R}^3$ возьмем три вектора: $x_1 = (1;3;3)$, $x_2 = (1;1;1)$, $x_3 = (-2;-4;-4)$. Легко проверить, что $x_1 + x_2 + x_3 = (0;0;0) = \theta \in \mathbf{R}$. Отсюда следует, что система x_1, x_2, x_3 является линейно зависимой.

Отметим некоторые свойства линейно зависимых и линейно независимых систем.

1. Система, содержащая нулевой вектор, линейно зависима.

2. Если система векторов линейно независима, то любая ее подсистема также линейно независима.

3. Если система векторов линейно зависима, то любая система векторов, ее содержащая, также линейно зависима.

4. Система из одного вектора линейно зависима тогда и только тогда, когда этот вектор — нулевой.

5. Если вектор x принадлежит линейной оболочке векторов x_1, x_2, …, x_m , то система векторов x_1, …, x_m, x линейно зависима.

□ Пусть $x \in \mathcal{L}(x_1, \ldots, x_m)$, т.е. существуют $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbf{R}$ такие, что $x = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_m x_m$. Тогда $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_m x_m + (-1)x = \theta$, причем не все коэффициенты при векторах равны нулю. Следовательно, система линейно зависима.

6. Система линейно зависима тогда и только тогда, когда в ней имеется вектор, линейно выражающийся через остальные векторы системы.

□ Пусть в системе векторов имеется вектор x, линейно выражающийся через оставшиеся векторы системы x_1, …, x_m. Тогда $x \in \mathcal{L}(x_1, \ldots, x_m)$, и по свойству 5 система x_1, …, x_m, x линейно зависима.

Обратно, пусть имеется линейно зависимая система x_1, …, x_k. По определению, существуют $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbf{R}$ такие, что $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k = \theta$, причем некоторое из чисел α_i отлично от нуля. Тогда имеем равенство $\alpha_i x_i = -\alpha_1 x_1 - \ldots - \alpha_{i-1} x_{i-1} - \alpha_{i+1} x_{i+1} - \ldots - \alpha_k x_k$, откуда вектор x равен $(-\alpha_1/\alpha_i) x_1 + \ldots + (-\alpha_{i-1}/\alpha_i) x_{i-1} + (-\alpha_{i+1}/\alpha_i) x_{i+1} + \ldots + (-\alpha_k/\alpha_i) x_k$, т.е. вектор x_i линейно выражается через оставшиеся векторы. ■

Определение. Пусть V — векторное пространство. Система векторов пространства V (конечная или бесконечная) называется *базисом* векторного пространства V, если выполнены следующие два условия:

1. система линейно независима,

2. любой вектор пространства V линейно выражается через векторы системы.

ТЕОРЕМА *Система векторов S векторного пространства V является базисом пространства V тогда и только тогда, когда любой вектор $x \in V$ единственным образом представляется в виде линейной комбинации векторов из S.*

□ Пусть система S является базисом. Достаточно доказать, что любой вектор $x \in V$ единственным образом представляется в виде линейной комбинации векторов из S. Предположим, что имеются два таких представления; докажем, что они совпадают. Пусть $x = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k$, $x = \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_k x_k$, где $x_1, \ldots, x_k \in S$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, $\beta_1, \ldots, \beta_k$ — числа. Вычитая из одного равенства другое, мы получим $(\alpha_1 - \beta_1)x_1 + \ldots + (\alpha_k - \beta_k)x_k = \theta$, откуда по определению линейно независимой системы мы можем заключить, что все коэффициенты равны нулю, т.е. $\alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_k = \beta_k$, и представления совпадают.

Обратно, пусть система S удовлетворяет условию теоремы. Докажем, что она является базисом. Достаточно установить линейную независимость системы. Пусть выполнено равенство $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k = \theta$, где $x_1, \ldots, x_k \in S$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbf{R}$. Поскольку для нулевого вектора имеется представление с нулевыми коэффициентами, и по условию представление любого вектора в виде линейной комбинации векторов из S единственно, мы получаем $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$, т.е. система S линейно независима. ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $x_1, \ldots, x_k$ — базис в пространстве V. По теореме, для любого вектора $x \in V$ существуют и единственны числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ такие, что $x = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k$. Эти числа называются *координатами* вектора x в базисе $x_1, \ldots, x_k$.

Примеры.

1. Рассмотим пространство $\mathbf{R}^n$ и в нем векторы $e_1 = (1; 0; \ldots; 0)$, $e_2 = (0; 1; \ldots; 0)$, $\ldots$, $e_n = (0; 0; \ldots; 1)$. (Вектор e_i есть строка из n чисел, в которой на i-ом месте стоит единица, а все остальные числа — нули.) Легко проверить, что $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n$ есть строка $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Следовательно, любая строка из $\mathbf{R}^n$ единственным образом может быть представлена в виде линейной комбинации векторов $e_1, \ldots, e_n$. Это означает, согласно теореме, что система векторов $e_1, \ldots, e_n$ является базисом пространства $\mathbf{R}^n$. Этот базис называется *стандартным базисом* пространства $\mathbf{R}^n$.

2. Рассмотрим пространство V_n многочленов степени не выше n от переменной t. Поскольку всякий многочлен однозначно определяется своими коэффициентами, система многочленов $1, t, t^2, \ldots, t^n$ будет базисом в V_n. Если V — это пространство всех многочленов от переменной t, то базисом этого пространства будет бесконечная система многочленов $1, t, t^2, \ldots, t^k, \ldots$.

Установим еще одно свойство базиса.

ТЕОРЕМА *Базис линейного пространства V является максимальной линейно независимой системой. Обратно, всякая максимальная линейно независимая система является базисом.*

$\square$ Пусть дан базис в V. По определению, любой вектор линейно выражается через векторы базиса. Следовательно,при добавлении нового вектора к базису получится линейно зависимая система, т.к. один из ее векторов линейно выражается через остальные. Поэтому базис нельзя включить в бо́льшую линейно независимую систему, т.е. базис — максимальная линейно независимая система.

Обратно, пусть дана максимальная линейно независимая система векторов x_1, ..., x_k. Докажем, что она является базисом. Достаточно проверить выполнение условия 2 из определения базиса. Пусть $x \in V$. По условию, система $x_1, \ldots, x_k, x$ линейно зависима. Следовательно, существуют не равные одновременно нулю числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha$ такие, что $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k + \alpha x = \theta$. При этом $\alpha \neq 0$, т.к. $x_1, \ldots, x_k$ — линейно независимая система. Поэтому вектор x можно выразить через $x_1, \ldots, x_k$.

Тем самым доказано, что эта система есть базис. ■

Дадим теперь определение размерности векторного пространства.

Определение. Число $n \geq 0$ называется *размерностью* векторного пространства V, если в пространстве V существуют линейно независимые системы из n векторов, а любая система, состоящая более чем из n векторов, линейно зависима.

Иными словами, размерность векторного пространства — это максимальное число векторов, которое может иметь линейно независимая система векторов этого пространства.

Размерность пространства V обозначается $\dim V$.

Если в пространстве V существуют линейно независимые системы, содержащие сколь угодно большое число векторов, то V называется *бесконечномерным*. Обозначение: $\dim V = \infty$. В противном случае V называется *конечномерным*.

Примеры.

1. Пространство $V = \{\theta\}$, т.е. V — нулевое пространство. Тогда размерность V равна нулю. Верно и обратное.

2. Числовая прямая $\mathbb{R}$ имеет размерность 1.

3. Далее будет доказано, что размерность пространства $\mathbb{R}^n$ равна n. Заметим, что прямо из определений это не следует.

4. Если V — пространство многочленов от переменной t, то при любом n система $1, t, t^2, t^3, \ldots, t^n$ линейно независима. Следовательно, V бесконечномерно.

ТЕОРЕМА *Пусть* $\dim V = n$. *Тогда в пространстве V можно выбрать базис, состоящий из n векторов. Более того, любая линейно независимая система, содержащая n векторов, будет базисом в V.*

$\square$ По определению размерности, в V существуют линейно независимые системы из n векторов. Всякая такая система будет максимальной линейно независимой системой, а потому и базисом в V. ■

Замечание. Пока мы еще не умеем доказывать, что всякий базис в n-мерном пространстве состоит из n векторов. Позже это будет доказано.

Рассмотрим теперь вопрос о размерности подпространства.

ТЕОРЕМА *Пусть* $\dim V = n$, W — *подпространство в* V. *Тогда* $\dim W = m \leq n$, *причем* $W = V \Leftrightarrow m = n$. *Иными словами, размерность подпространства* *не превосходит размерности пространства, причем W совпадает с V в том и только в том случае, когда их размерности равны.*

□ Линейно независимая система векторов, содержащаяся в W, содержится также и в V, а потому состоит не более,чем из n векторов. Следовательно, размерность W не превосходит размерности V. Пусть $m = \dim W$. Если $V = W$, то $\dim V = \dim W$, т.е. $n = m$. Обратно, при $m = n$ рассмотрим некоторый базис в W, состоящий из m векторов. Он является линейно независимой системой в V, состоящей из n векторов. Следовательно, он будет базисом и в V. Так как линейная оболочка векторов базиса есть все пространство, то V и W совпадают, будучи линейными оболочками одной и той же системы. ■

Введем теперь понятие изоморфизма пространств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть V_1 и V_2 — линейные пространства. Взаимно-однозначное отображение $\phi\colon V_1 \to V_2$ называется *изоморфизмом* пространств V_1 и V_2, если выполняются следующие два условия:

1. $\forall x, y \in V_1 \quad \phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y)$;

2. $\forall x \in V_1, \forall \alpha \in \mathrm{R} \quad \phi(\alpha x) = \alpha\phi(x)$.

Если существует изоморфизм ϕ пространств V_1 и V_2, то говорят, что пространство V_1 изоморфно пространству V_2 и обозначают это таким образом: $V_1 \cong V_2$.

Свойства изоморфизма.

1. $V \cong V$ (в качестве $\phi\colon V \to V$ берем отображение, задаваемое формулой $\phi(x) = x$).

2. $V_1 \cong V_2 \Rightarrow V_2 \cong V_1$. Проверим это. Пусть $\phi\colon V_1 \to V_2$ — изоморфизм. Рассмотрим обратное отображение $\phi^{-1}\colon V_1 \to V_2$. Проверим, что оно является изоморфизмом. Пусть $\phi^{-1}(x) = u$, $\phi^{-1}(y) = v$. Тогда $\phi(u) = x$ и $\phi(v) = y$. Имеем $x + y = \phi(u) + \phi(v) = \phi(u+v)$, откуда $\phi^{-1}(x+y) = u + v = \phi^{-1}(x) + \phi^{-1}(y)$. Далее, $\alpha x = \alpha\phi(u) = \phi(\alpha u)$, т.е. $\phi^{-1}(\alpha x) = \alpha u = \alpha\phi^{-1}(x)$, что и требовалось доказать.

3. $V_1 \cong V_2$ & $V_2 \cong V_3 \Rightarrow V_1 \cong V_3$. Это свойство рекомендуется проверить самостоятельно.

ТЕОРЕМА *Пусть в пространстве V имеется базис, состоящий из n векторов. Тогда $V \cong \mathrm{R}^n$. В частности, если $\dim V = n$, то $V \cong \mathrm{R}^n$.*

□ Установим взаимно-однозначное соответствие между V и R^n. Выберем в V базис из n векторов: $x_1, \ldots, x_n$. Каждому вектору $x \in V$ сопоставим строку из координат вектора x в этом базисе. Полагаем $\phi(x) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, если $x = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n$. При этом имеем отображение $\phi\colon V \to \mathrm{R}^n$. Легко убедиться, что оно взаимно-однозначно (см. определение координат вектора в базисе). Проверим, что ϕ будет изоморфизмом. Рассмотрим векторы $x, y \in V$. Пусть $x = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n$, $y = \beta_1 y_1 + \ldots + \beta_n y_n$. По определению ϕ, $\phi(x) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\phi(y) = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$. Поскольку $x + y = (\alpha_1 + \beta_1)x_1 + \ldots + (\alpha_n + \beta_n)x_n$, то $\phi(x+y) = (\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n) = \phi(x) + \phi(y)$. Рекомендуем самостоятельно убедиться в том, что $\phi(\alpha x) = \alpha\phi(x)$. В итоге имеем $V \cong \mathrm{R}^n$. ■

СЛЕДСТВИЕ. Любые два пространства одинаковой размерности изоморфны.

□ Пусть $\dim V_1 = \dim V_2 = n$. По теореме, $V_1 \cong \mathbf{R}^n$, $V_2 \cong \mathbf{R}^n$. Согласно свойствам изоморфизма 2 и 3, $V_1 \cong V_2$. ■

Из определения изоморфизма нетрудно убедиться в том, что изоморфизм сохраняет такие свойства системы векторов, как: линейная зависимость, линейная независимость, свойство быть базисом. Ясно также, что размерность пространства не меняется при изоморфизме. Мы рекомендуем читателю в качестве полезного упражнения в этом убедиться.

Следовательно, два линейных пространства изоморфны тогда и только тогда, когда их размерности равны.

Ранее мы обещали доказать, что размерность пространства $\mathbf{R}^n$ равна n. На первый взгляд может показаться, что теперь это легко сделать. В самом деле, пусть $\dim V = n$. Согласно доказанному выше, $V \cong \mathbf{R}^n$. Но тогда $\dim \mathbf{R}^n = \dim V = n$. Однако, чтобы это рассуждение проходило, необходимо доказать существование хотя бы одного пространства размерности n. Но это сделать не проще, чем предъявить в качестве примера такого пространства само $\mathbf{R}^n$. На самом деле, доказательство утверждения гораздо сложнее.

ТЕОРЕМА (о размерности $\mathbf{R}^n$) *Размерность пространства* $\mathbf{R}^n$ *равна* n, *т.е.* $\dim \mathbf{R}^n = n$.

□ Поскольку нами был построен стандартный базис $e_1, \ldots, e_n$ в пространстве $\mathbf{R}^n$, ясно, что в $\mathbf{R}^n$ существует линейно независимая система из n векторов. Нам достаточно доказать, что в $\mathbf{R}^n$ любая система из $n+1$ вектора линейно зависима.

Докажем это утверждение "от противного". Предположим, что существует n, при котором в $\mathbf{R}^n$ есть линейно независимая система $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$ из $n+1$ вектора. Будем считать, что такое число n выбрано минимально возможным. Это значит, что при $k < n$ любая система в $\mathbf{R}^k$, состоящая из $k+1$ вектора, линейно зависима.

Рассмотрим вначале случай $n = 1$. Мы уже замечали, что любые два элемента в $\mathbf{R}^1$ образуют линейно зависимую систему. Проверим это еще раз: пусть $(\alpha), (\beta) \in \mathbf{R}^1$. Очевидно, что $\beta(\alpha) + (-\alpha)(\beta) = \theta$. Если α и β не равны нулю одновременно, то это дает линейную зависимость системы. В противном случае оба вектора системы нулевые. Итак, система $(\alpha), (\beta)$ всегда линейно зависима в $\mathbf{R}^1$.

Итак, теперь мы можем считать, что $n > 1$.

По предположению, у нас имеется линейно независимая система $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$. Приведем к противоречию это предположение. Рассмотрим первые n векторов системы и запишем их как строки из n чисел:

$$x_1 = (\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1n}),$$

$$\cdots\cdots$$

$$x_n = (\alpha_{n1}, \ldots, \alpha_{nn}).$$

Зафиксируем число i от 1 до n. Рассмотрим векторы $y_1, \ldots, y_n$, получаемые вычеркиванием i-ой компоненты из векторов $x_1, \ldots, x_n$ соответственно. Векторы

$y_1, \ldots, y_n$ принадлежат R^{n-1}. Так как n выбрано наименьшим, эти векторы образуют линейно зависимую систему. Поэтому найдутся числа $\beta_1, \ldots, \beta_n$, не равные одновременно нулю, такие что $\beta_1 y_1 + \ldots + \beta_n y_n = \theta$.

Вектор $\beta_1 x_1 + \ldots + \beta_n x_n$ имеет нулевые компоненты, за исключением i-ой. Он не может быть нулевым, т.к. это дало бы линейную зависимость системы $x_1, \ldots, x_n$. Следовательно, $\beta_1 x_1 + \ldots + \beta_n x_n = \lambda_i e_i$, где $\lambda_i \neq 0$. Поэтому вектор e_i линейно выражается через векторы $x_1, \ldots, x_n$, где i — любое число от 1 до n. Поскольку вектор x_{n+1} линейно выражается через $e_1, \ldots, e_n$, то x_{n+1} линейно выражается и через $x_1, \ldots, x_n$. Это противоречит линейной независимости системы $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$. ■

Теперь мы можем дать ответ на вопрос, сколько векторов может иметь базис n-мерного пространства.

ТЕОРЕМА *Пусть* $\dim V = n$. *Тогда любой базис пространства* V *состоит из* n *векторов.*

□ Если $x_1, \ldots, x_k$ — произвольный базис в V, то $V \cong \mathrm{R}^k$. Следовательно, $k = \dim \mathrm{R}^k = \dim V = n$, т.е. $k = n$. ■

Кратко повторим некоторые факты,установленные в этом параграфе. Векторные пространства изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую размерность. Если пространство имеет размерность n, то любой его базис состоит из n векторов. При этом пространство будет изоморфным пространству R^n.

§3. Системы линейных уравнений. Метод исключения неизвестных (метод Гаусса).

Рассмотрим систему уравнений Σ с неизвестными $x_1, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Все коэффициенты вида a_{ij}, b_i являются числами. Решением системы будем называть набор значений неизвестных $(x_1, \ldots, x_n)$, которые удовлетворяют всем уравнениям системы. Две системы линейных уравнений с неизвестными $x_1, \ldots, x_n$ будем называть ***равносильными***, если они имеют одно и то же множество решений. Систему будем называть ***совместной***, если она имеет хотя бы одно решение, и ***несовместной*** в противном случае. Если система имеет ровно одно решение, то она называется ***определенной***. Если множество решений системы бесконечно, то она называется ***неопределенной***.

Рассмотрим некоторые преобразования системы, которые будем называть ***элементарными преобразованиями*** системы.

1. Перестановка уравнений системы.

2. Умножение уравнения на число $\lambda \neq 0$.

3. Прибавление к i-ому уравнению системы j-ого уравнения, умноженного на число λ (при $i \neq j$).

Легко видеть, что указанные преобразования не меняют множество решений системы. Проверим это для третьего случая. Пусть даны системы из двух уравнений:

$$\begin{cases} A=0 \\ B=0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} A=0 \\ B+\lambda A=0 \end{cases}.$$

Легко видеть, что они равносильны, т.к. из $A=0$ и $B=0$ следует $B+\lambda A=0$, а из $A=0$ и $B+\lambda A=0$ следует $B=0$.

Обычно при решении систем работают лишь с коэффициентами a_{ij} и b_i, записывая их в таблицу:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right),$$

которая называется *расширенной матрицей* системы Σ. Таблица, содержащая только коэффициенты a_{ij}, называется *матрицей* системы Σ. Вместо элементарных преобразований систем будем рассматривать элементарные преобразования матриц (сокращенно ЭП):

1. перестановка строк матрицы;
2. умножение строки матрицы на число $\lambda \neq 0$;
3. прибавление к строке с номером i строки с номером $j \neq i$, умноженной на число λ.

Отметим, что при преобразованиях расширенной матрицы строки преобразуются целиком, включая числа b_i. ЭП расширенных матриц и ЭП систем уравнений соответствуют друг другу, т.е. при ЭП матриц получаются равносильные системы. Наша задача — с помощью элементарных преобразований привести систему (матрицу) к такому виду, чтобы систему легко было можно решить. Для начала дадим определение *матрицы ступенчатого вида*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть дана матрица A размером $m \times n$, т.е. таблица с m строками и n столбцами. В каждой строке, где есть хотя бы один ненулевой элемент, рассмотрим элемент $a_{ik_i} \neq 0$ с наименьшим значением k_i. Мы говорим, что матрица A имеет ступенчатый вид, если при $i < j$ выполняется неравенство $k_i < k_j$, причем всякая строка, содержащая только нули, имеет больший номер, чем любая строка, в которой не все элементы равны нулю.

(Через a_{ij} мы обозначаем элемент таблицы, расположенный в строке с номером i и в столбце с номером j.) Приведем примеры.

$$\begin{pmatrix} 1 & -8 & 7 & 12 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & -9 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 6 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Здесь матрица слева имеет ступенчатый вид, а матрица справа — не имеет.

ТЕОРЕМА (о приведении матрицы к ступенчатому виду) *С помощью элементарных преобразований 1 и 3 всякую матрицу можно привести к ступенчатому виду.*

□ Пусть дана матрица A размером $m \times n$ с общим элементом a_{ij}. Мы будем обозначать это так: $A = ||a_{ij}||$.

Пусть не все элементы первого столбца нулевые. Переставляя, если нужно, строки, мы добьемся того, чтобы a_{11} не равнялось нулю. Далее проделаем $m-1$ элементарное преобразование вида 3, а именно, для всех i от 2 до m прибавим к i-ой строке первую строку, умноженную на число $-a_{i1}/a_{11}$. В результате во всем первом столбце, кроме числа $a_{11} \neq 0$, мы получим нули. Итак, будем считать, что $a_{i1} = 0$ при i от 2 до m. Далее применим описываемый алгоритм к матрице, полученной из A вычеркиванием первой строки и первого столбца.

Если все элементы первого столбца нулевые, то перейдем к следующему столбцу и т.д. В результате матрица будет иметь ступенчатый вид. ■

Пример. Применим этот процесс, обозначая переходы знаком $\to$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

При решении систем линейных уравнений может быть применен так называемый метод Гаусса, или метод исключения неизвестных. Пусть дана система Σ из m линейных уравнений от n неизвестных. Приведем расширенную матрицу этой системы к ступенчатому виду.

Если в полученной матрице B ступенчатого вида есть строка вида $(0\,0\,\ldots\,0 \mid \lambda)$, где $\lambda \neq 0$, то система Σ несовместна, т.е. множество ее решений пусто.

Если таковых строк не имеется, то отбросим все нулевые строки матрицы. Если при этом не осталось строк, то множество решений есть $\mathbb{R}^n$. Для каждой ненулевой строки объявим *главной неизвестной* x_j, если a_{ij} — первый слева ненулевой элемент i-ой строки. Мы получим столько главных неизвестных, сколько ненулевых строк окажется у матрицы B. Остальные неизвестные объявим *свободными*. Далее, начиная с последнего уравнения, выразим каждую из главных неизвестных через свободные неизвестные. При этом мы получим значения всех главных неизвестных, выраженные через свободные неизвестные. Надо учитывать, что свободные неизвестные могут вовсе отсутствовать — при этом система будет иметь ровно одно решение.

Рассмотрим несколько примеров решения систем линейных уравнений с применением метода Гаусса.

1. Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}.$$

Составим расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -2 & 11 \\ 3 & -2 & 4 & 11 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -5 & 1 & -7 \\ 3 & 4 & -2 & 11 \\ 3 & -2 & 4 & 11 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -5 & 1 & -7 \\ 0 & -11 & 1 & -10 \\ 0 & -17 & 7 & -10 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 7 \\ 0 & -11 & 1 & -10 \\ 0 & -6 & 6 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -11 & -10 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -11 & -10 \\ 0 & 0 & 10 & 10 \end{array}\right).$$

Отсюда получаем, что все неизвестные являются главными. Находим их значения: $x_3 = 1$, $x_2 = -10 + 11x_3 = 1$, $x_1 = 7 + x_3 - 5x_2 = 3$.

Ответ: $(3; 1; 1)$.

2. Решить систему:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3 \end{cases}.$$

Рассмотрим расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Неизвестные x_1, x_3 будут главными, а x_2, x_4 — свободными. Осталось выразить *главные неизвестные* через свободные. Мы имеем систему, равносильную исходной:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_3 = -1 \end{cases}.$$

Исходя из нее, находим: $x_3 = -1$, $x_1 = 1 - x_2 - x_3 - x_4 = 2 - x_2 - x_1$. Получим *общее решение системы*: $(2 - x_2 - x_4; x_2; -1; x_4)$. Придавая свободным неизвестным произвольные числовые значения, будем получать *частные решения*, например, $(2; 0; -1; 0)$, $(-3; 2; -1; 3)$. В случае, когда система является неопределенной, принято указывать в ответе общее решение и одно или несколько частных решений. В данном случае имеем

Ответ: о/р $(2 - x_2 - x_4; x_2; -1; x_4)$, ч/р $(2; 0; -1; 3)$.

3. Решить систему:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}.$$

Рассмотрим расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Получившаяся система решений не имеет, так как одно из уравнений имеет вид $0 = 1$, что невозможно.

Ответ: система несовместна.

§4. Ранг матрицы.

Пусть дана *матрица* A размером $m \times n$ с *общим элементом* a_{ij}, т.е. прямоугольная таблица с m *строками* и n *столбцами*, на пересечении i-ой строки и j-ого столбца которой стоит элемент a_{ij}.

В этом параграфе мы введем понятия *строкового* и *столбцевого ранга* матрицы, а затем докажем, что они совпадают. Получившаяся величина будет называться *рангом матрицы*.

Строки матрицы A можно рассматривать как векторы пространства $\mathbb{R}^n$, а столбцы — как векторы пространства $\mathbb{R}^m$. Пусть $A_1, \ldots, A_m \in \mathbb{R}^n$ — строки, а $B_1, \ldots, B_n \in \mathbb{R}^m$ — столбцы матрицы A. Введем обозначения:

$V_{row} = \mathcal{L}(A_1, \ldots, A_m)$ — линейная оболочка строк;

$V_{col} = \mathcal{L}(B_1, \ldots, B_n)$ — линейная оболочка столбцов.

Ясно, что V_{row} — подпространство в $\mathbb{R}^n$, а V_{col} — подпространство в $\mathbb{R}^m$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Строковым рангом матрицы A называется число $\dim V_{row}$ — размерность пространства строк, а столбцевым рангом матрицы A называется число $\dim V_{col}$ — размерность пространства столбцов.

Докажем несколько вспомогательных утверждений.

ЛЕММА 1 *Строковый ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях строк.*

□ Мы докажем более сильное утверждение: при ЭП строк не меняется само пространство строк V_{row}.

Если применить ЭП 1, т.е. поменять местами строки, то их линейная оболочка не изменится. Если применить ЭП 2, т.е. умножить строку A_i на число $\lambda \neq 0$, то вновь линейная оболочка не меняется. Наконец, применим ЭП 3, т.е. вместо системы строк $A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots, A_m$ рассмотрим систему строк $A_1, \ldots, A_i + \lambda A_j, \ldots, A_j, \ldots, A_m$.

Проверим, что линейные оболочки систем равны. Действительно, вектор $A_i + \lambda A_j$ принадлежит линейной оболочке первой системы, а вектор $A_i = (A_i + \lambda A_j) - \lambda A_j$ принадлежит линейной оболочке второй системы.

Тем самым, при всех ЭП строк пространство строк не меняется. Следовательно, строковый ранг остается неизменным. ■

Наряду с элементарными преобразованиями строк будем рассматривать также три вида элементарных преобразования столбцов.

Аналогично доказывается

ЛЕММА 2 *Столбцевой ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях столбцов.* ■

Сейчас мы посмотрим, что происходит со строковым рангом при ЭП столбцов.

ЛЕММА 3 *Строковый ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях столбцов.*

□ Рассмотрим для любых i, j от 1 до n отображение τ_{ij} пространства $\mathbf{R}^n$ в себя, задаваемое формулой $\tau_{ij}((a_1,\ldots,a_i,\ldots,a_j,\ldots,a_n))= (a_1,\ldots,a_j,\ldots,a_i,\ldots,a_n)$. Легко проверить, что τ_{ij} есть изоморфизм пространства $\mathbf{R}^n$ на себя. Далее, пусть $\lambda \neq 0$. Зададим отображение σ_i формулой $\sigma_i((a_1,\ldots,a_i,\ldots,a_n)) = (a_1,\ldots,\lambda a_i,\ldots,a_n)$. Также легко видеть, что получится изоморфизм $\mathbf{R}^n$ на себя. Наконец, для любого λ и пары $i \neq j$ от 1 до n определим отображение ρ_{ij} с помощью формулы $\rho_{ij}((a_1,\ldots,a_i,\ldots,a_j,\ldots,a_n)) = (a_1,\ldots,a_i+\lambda a_j,\ldots,a_j,\ldots,a_n)$. Рекомендуем читателю самостоятельно убедиться в том, что ρ_{ij} задает изоморфизм пространства $\mathbf{R}^n$ на себя. Вспомним также,что при изоморфизме не меняется размерность.

Пусть к матрице A применили ЭП столбцов и получили матрицу B. Посмотрим, что при этом происходит с пространством строк.

Если было применено ЭП 1 — перестановка i-ого и j-ого столбцов, то каждая строка матрицы A испытает действие отображения τ_{ij}. При этом $\tau_{ij}(V_{row}(A)) = V_{row}(B)$. Следовательно, поскольку τ_{ij} — изоморфизм, $\dim V_{row}(A) = \dim V_{row}(B)$.

Если было применено ЭП 2, то $\sigma_i(V_{row}(A)) = V_{row}(B)$.

Если было применено ЭП 3, то $\rho_{ij}(V_{row}(A)) = V_{row}(B)$. .

В любом случае, размерности пространств строк матриц A и B равны, т.е. строковый ранг не меняется при ЭП столбцов. ■

Аналогично доказывается

ЛЕММА 4 *Столбцевой ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях строк.* ■

Теперь, пользуясь доказанными леммами, мы установим,что у любой матрицы A строковый и столбцевой ранги равны.

ТЕОРЕМА (о ранге матрицы) *Строковый ранг матрицы равен столбцевому рангу этой матрицы.*

□ Леммы 1–4 утверждают, что оба ранга не меняются при ЭП как строк, так и столбцов. С помощью всевозможных ЭП приведем матрицу к возможно более простому виду, который назовем *стандартным видом* матрицы, а затем убедимся, что у матрицы стандартного вида оба ранга равны.

Для начала приведем матрицу A к ступенчатому виду, пользуясь ЭП строк. Пусть при этом получилось r ненулевых строк. Теперь переставим, если необходимо, столбцы матрицы так, чтобы для каждой ненулевой строки с номером i ее первый слева ненулевой элемент α_i стоял в i-ом столбце. Теперь воспользуемся ЭП столбцов третьего вида. Будем умножать первый столбец на подходящее число и прибавлять результат к столбцам справа от первого так, чтобы в итоге справа от α_1 все числа оказались равными нулю (например, если в первой строке и в j-ом столбце стоит элемент a_{1j}, то нужно первый столбец умножить на число $-a_{1j}/\alpha_1$ и результат прибавить к j-ому столбцу).

Далее, с помощью второго столбца добьемся элементарными преобразованиями столбцов того, чтобы справа от α_2 все числа стали нулевыми и т.д. вплоть до r-го столбца. После всех этих преобразований получится матрица, у которой все числа, кроме $\alpha_1, \dots, \alpha_r$, равны нулю. Теперь разделим i-ую строку на α_i. Мы получим матрицу так называемого стандартного вида:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

в которой все числа равны нулю, кроме чисел a_{ii} $(1 \le i \le r)$, равных 1.

Осталось заметить, что и пространство строк, и пространство столбцов стандартной матрицы изоморфны $\mathbf{R}^r$. Отсюда следует, что оба ранга матрицы A, строковый и столбцевой, равны r. ∎

Теперь можно ввести понятие ранга матрицы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Рангом матрицы называется число, равное строковому и столбцевому рангу этой матрицы.

Укажем практический способ нахождения ранга матрицы. Ясно, что вовсе нет необходимости для нахождения ранга приводить матрицу к стандартному виду. Достаточно привести матрицу к ступенчатому виду и подсчитать число r ненулевых строк. Это и будет ранг матрицы.

Пример. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & -5 & -6 \\ 5 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Приведем матрицу A к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & -5 & -6 \\ 5 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & -3 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & -5 & -6 \\ 5 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & -7 & 11 & 6 \\ 0 & -7 & 11 & 6 \\ 0 & -14 & 22 & 12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & -7 & 11 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ответ: ранг матрицы A равен двум.

§5. Матрицы и действия над ними. Обратная матрица.

Напомним, что матрицей размером $m \times n$ называется прямоугольная таблица, содержащая m строк и n столбцов. Мы пишем $A = ||a_{ij}||$, если на пересечении i-ой строки и j-ого столбца таблицы стоит a_{ij}.

Матрицы одинакового размера можно складывать.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть A и B — матрицы размером $m \times n$; $A = ||a_{ij}||$, $B = ||b_{ij}||$. Тогда суммой $A + B$ матриц A и B назовем матрицу размером $m \times n$, у которой на пересечении i-ой строки и j-ого столбца расположен элемент $a_{ij} + b_{ij}$, т.е. $A + B = ||c_{ij}||$, где $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Пример.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & -5 \\ 2 & 2 & 0 & 8 \\ 4 & -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & -8 & 8 \\ -5 & -3 & 7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 2 & -3 \\ 3 & 3 & -8 & 16 \\ -1 & -4 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что для любых матриц $m \times n$ справедливы равенства: $A + B = B + A$, $(A + B) + C = A + (B + C)$.

Далее, матрицу A можно умножить на число λ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть A — матрица размером $m \times n$, $\lambda \in \mathbf{R}$. Произведением матрицы A на число λ будем называть матрицу λA размером $m \times n$, у которой на пересечении i-ой строки и j-ого столбца стоит элемент λa_{ij}, т.е. $\lambda A = ||c_{ij}||$, где $c_{ij} = \lambda a_{ij}$.

Пример.

$$-\frac{3}{4} \cdot \begin{pmatrix} 18 & -6 & -2 & -12 \\ 4 & 8 & -8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27/2 & 9/2 & 3/2 & 9 \\ -3 & -6 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рекомендуем читателю в качестве упражнения убедиться в том, что матрицы размером $m \times n$ образуют векторное пространство относительно операции сложения и умножения на число. Это пространство изоморфно $\mathbf{R}^{mn}$, а его размерность равна mn.

Теперь определим понятие произведения матриц.

Определение. Пусть A — матрица размером $m \times n$, B — матрица размером $n \times s$. Произведением матриц A и B называется матрица C размером $m \times s$, у которой на пересечении i-ой строки и j-ого столбца стоит элемент $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$. Обозначение: $C = A \cdot B$.

Замечание. При нахождении элемента c_{ij} нужно умножить элементы i-ой строки матрицы A на элементы j-ого столбца матрицы B соответственно и получившиеся числа сложить. При этом говорят, что мы i-ую строку матрицы A (скалярно) умножили на j-ый столбец матрицы B. Произведение матриц A и B определено в том и только в том случае, когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B. Например, матрицу размером 2×3 нельзя умножить на матрицу размером 2×3. В то же время, матрицу 2×3 можно умножить на матрицу 3×4. В результате получится матрица размером 2×4.

Пример.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 9 & -4 \\ -6 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть даны три матрицы: A размером $m \times n$, B размером $n \times s$ и C размером $s \times t$. Тогда справедливо равенство $(AB)C = A(BC)$. Мы рекомендуем читателю в качестве упражнения проверить этот закон, пользуясь определением.

Отметим также, что помимо сочетательного закона для умножения матриц справедливы два распределительных закона. Их справедливость также может быть установлена, исходя из определений. Сформулируем эти законы.

1. Пусть A — матрица $m \times n$, B, C — матрицы $n \times s$. Тогда $A(B+C) = AB+AC$.

2. Пусть A, B — матрицы $m \times n$, C — матрица $n \times s$. Тогда $(A+B)C = AC+BC$.

Отметим теперь законы, которые не выполняются для умножения матриц. Во-первых, если определено произведение AB, то произведение BA определено тогда и только тогда, когда A и B — квадратные матрицы, т.е. матрицы $n \times n$. Приведем пример двух квадратных матриц A и B, для которых $AB \neq BA$.

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Во-первых, при этом $AB \neq BA$. Во-вторых, $BA = \Theta$ при $A \neq \Theta$, $B \neq \Theta$, где Θ — нулевая матрица, т.е. матрица из одних нулей.

Таким образом, умножение матриц не коммутативно. Произведение двух ненулевых матриц может оказаться нулевым, в отличие от чисел.

Наряду с нулевой матрицей размером $m \times n$, обладающей свойством, что для любой $m \times n$-матрицы A верны равенства $A + \Theta = \Theta + A = A$, можно определить *единичную матрицу* E размером $n \times n$ такую, что для любой $n \times n$-матрицы A верны равенства $AE = EA = A$. Такая матрица для любого $n \in \mathbf{N}$ существует и единственна. Она имеет вид

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

где i-ая строка представляет собой вектор $e_i \in \mathbf{R}^n$.

Таким образом, можно сделать вывод, что матрицы размером $n \times n$ образуют ассоциативное, но не коммутативное кольцо с единицей относительно операций сложения и умножения. Поскольку эти матрицы одновременно образуют линейное пространство над полем $\mathbf{R}$, то говорят, что $n \times n$-матрицы образуют *алгебру* над полем $\mathbf{R}$. Эта алгебра обозначается $\mathrm{Mat}_n(\mathbf{R})$ и называется *полной матричной алгеброй* n-го порядка над полем $\mathbf{R}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть A — матрица $n \times n$. Она называется *обратимой*, если существует матрица B того же размера такая, что $AB = BA = E$.

Заметим, что если такая матрица B существует, то она единственна. *Действительно*, пусть имеются две такие матрицы B и C. Докажем, что они равны. Нам дано, что $AB = BA = E = AC = CA$. Равенство $AB = AC$ *домножим* слева на B и воспользуемся ассоциативностью умножения. Получим: $B(AB) = B(AC)$, $(BA)B = (BA)C$, $EB = EC$, $B = C$, ч.т.д. Таким образом, для обратимой матрицы A существует и единственна матрица B из определения. Она называется *матрицей, обратной* к A и обозначается A^{-1}. Нетрудно проверить, что $(A^{-1})^{-1} = A$.

Укажем один из способов нахождения обратной матрицы, которым удобно пользоваться на практике, особенно при $n \geq 4$, где n — порядок матрицы. Позже мы приведем еще один способ нахождения обратной матрицы, который более удобен при $n \leq 3$.

Вначале опишем способ в общем виде. Пусть A – матрица n-го порядка. Составим *двойную матрицу* вида $(A \mid E)$, где E — единичная матрица. Будем *применять* к строкам двойной матрицы элементарные преобразования. Наша цель — *добиться* того, чтобы вместо A возникла матрица E. Тогда на месте E *возникнет* нужная нам матрица A^{-1}. (Если этого добиться нельзя, то A не имеет обратной матрицы.)

Пример. Найти матрицу, обратную данной матрице A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. Вначале приведем A к ступенчатому виду. Мы должны получить матрицу, *у которой на главной диагонали* стоят ненулевые числа, а ниже главной *диагонали* — нули. Затем нужно последовательно получить нули выше главной диагонали. Для этого будем прибавлять к каждой строке, кроме последней, произведение последней строки на подходящее число. Наша цель — получить нули в *последнем столбце* у матрицы A выше главной диагонали. Далее то же делаем с предпоследним столбцом с помощью предпоследней строки и т.д. В результате мы будем иметь слева диагональную матрицу. Затем, умножая каждую строку на некоторое число, получим слева единичную матрицу. Справа будет стоять искомая матрица.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 9 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -7 & 10 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -8 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 6 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & -3 & -8 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -6 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 8 & 2 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&2&3&4&1&0&0&0\\0&1&1&-6&-1&0&-1&2\\0&0&1&13&2&1&1&-3\\0&0&0&26&5&0&3&-7\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|cccc}13&26&39&52&13&0&0&0\\0&13&13&-78&-13&0&-13&26\\0&0&2&26&4&2&4&-6\\0&0&0&26&5&0&3&-7\end{array}\right)\to$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}13&26&39&0&3&0&-6&14\\0&13&13&0&2&0&-4&5\\0&0&2&0&-1&2&1&1\\0&0&0&26&5&0&3&-7\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|cccc}26&52&78&0&6&0&-12&28\\0&26&26&0&4&0&-8&10\\0&0&2&0&-1&2&1&1\\0&0&0&26&5&0&3&-7\end{array}\right)\to$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}26&52&0&0&45&-78&-51&-11\\0&26&0&0&17&-26&-21&-3\\0&0&2&0&-1&2&1&1\\0&0&0&26&5&0&3&-7\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|cccc}26&0&0&0&11&-26&-9&-5\\0&26&0&0&17&26&21&-3\\0&0&2&0&-1&2&1&1\\0&0&0&26&5&0&3&-7\end{array}\right)$$

Осталось разделить третью строку на 2, а остальные на 26.

Ответ:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}11/26&-1&-9/26&-5/26\\17/26&-1&-21/26&-3/26\\-1/2&1&1/2&1/2\\5/26&0&3/26&-7/26\end{pmatrix}.$$

Можно произвести проверку, перемножив матрицы A и A^{-1}. В результате должна получиться единичная матрица.

§6. Матричная запись системы линейных уравнений. Однородные системы.

Системы линейных уравнений удобно представлять в матричном виде. Пусть дана система линейных уравнений Σ с матрицей A размером $m\times n$, столбцом свободных членов $b\in\mathrm{R}^m$ и столбцом $x\in\mathrm{R}^n$ из значений неизвестных:

$$\left\{\begin{array}{r}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2\\\ldots\ldots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m\end{array}\right.$$

Столбец b можно рассматривать как матрицу размером $m\times 1$, а столбец x — как матрицу $n\times 1$. Если умножить матрицу A на матрицу x, то получится столбец, в котором записаны левые части уравнений системы Σ. Следовательно, систему Σ можно записать в матричном виде следующим образом: $Ax=b$. Это и будет *матричная запись системы.*

Рассмотрим важный частный случай, когда число уравнений равно числу неизвестных, т.е. $m=n$.

ТЕОРЕМА *Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Если матрица A этой системы обратима, то система имеет ровно одно решение.

□ Отметим, что если E — единичная матрица $n \times n$, а x — вектор-столбец из $\mathbf{R}^n$, то по правилу умножения матриц $Ex = x$.

Запишем систему в матричном виде: $Ax = b$. Если A обратима, то существует обратная матрица A^{-1}. Умножим на A^{-1} слева равенство $Ax = b$. Получим: $A^{-1}(Ax) = A^{-1}b$, $(A^{-1}A)x = A^{-1}b$, $Ex = A^{-1}b$, $x = A^{-1}b$. Следовательно, вектор-столбец $A^{-1}b$ представляет собой единственное решение системы. ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Система линейных уравнений называется *однородной*, если все числа в правых частях уравнений равны нулю.

Общий вид однородной системы:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

В матричной записи однородная система выглядит так: $Ax = \theta$, где θ — нулевой вектор-столбец из $\mathbf{R}^m$.

Рассмотрим простейшие свойства однородных систем.

1. Всякая однородная система совместна, т.к. имеет нулевое решение.

2. Если x и y — решения однородной системы, то их сумма $x + y$ также есть решение этой системы.

3. Если x — решение однородной системы, $\lambda \in \mathbf{R}$, то λx также есть решение этой системы.

Для доказательства заметим, что если $Ax = \theta$ и $Ay = \theta$, то $A(x+y) = Ax+Ay = \theta$ и $A(\lambda x) = \lambda Ax = \theta$.

Свойства 1, 2, 3 означают,что множество решений однородной системы есть подпространство в $\mathbf{R}^n$, где n — число неизвестных.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Фундаментальной системой решений*** однородной системы называется базис в пространстве решений этой системы.

Пример. Решить однородную систему линейных уравнений и указать для нее какую-либо фундаментальную систему.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

Решение. Приведем матрицу системы к ступенчатому виду.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & 5 & -4 & 3 \\ 1 & 2 & 7 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & -3 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Неизвестные x_1, x_3, x_4 — главные, x_2, x_5 — свободные. Находим значения главных неизвестных: $x_4 = x_5$, $4x_3 = 2x_4 = 2x_5$, $x_3 = x_5/2$, $x_1 = -2x_2 - 3x_3 + 2x_4 - x_5 = -2x_2 - 3x_5/2 + 2x_5 - x_5 = -2x_2 - x_5/2$. Общее решение: $(-2x_2 - x_5/2; x_2; x_5/2; x_5; x_5) = x_2(-2;1;0;0;0) + (x_5/2)\cdot(-1;0;1;2;2)$. В качестве фундаментальной системы можно выбрать систему из двух векторов: $a = (-2;1;0;0;0)$, $b = (-1;0;1;2;2)$.

Ответ: о/р $(-2x_2 - x_5/2; x_2; x_5/2; x_5; x_5)$, фунд. сист. из двух векторов: $a = (-2;1;0;0;0)$, $b = (-1;0;1;2;2)$.

Рассмотрим вопрос о размерности пространства решений однород- ной системы.

ТЕОРЕМА *Размерность пространства решений однородной системы равна $n-r$, где n — число неизвестных, а r — ранг матрицы системы.*

□ Рекомендуем при чтении доказательства иметь в виду предыдущий пример. Если привести матрицу системы к ступенчатому виду, то число ненулевых строк будет равно r, и в то же время равно числу главных неизвестных. Тогда $n - r$ — число свободных неизвестных. Если рассмотреть вектор $(x_1, \ldots, x_n)$, где вместо главных неизвестных подставлены их выражения через свободные неизвестные, то мы получим общий вид решения системы. Этот вектор можно разложить по свободным неизвестным с коэффициентами — числовыми векторами, которых будет $n - r$. Обозначим эти коэффициенты $a_1, \ldots, a_{n-r}$. Ясно, что любое решение единственным образом можно разложить по этим векторам. Следовательно, $a_1, \ldots, a_{n-r}$ образуют базис в пространстве решений системы, т.е. фундаментальную систему решений. Поэтому размерность пространства решений равна $n - r$, поскольку совпадает с числом векторов в базисе. ■

Теперь рассмотрим вопрос о решениях произвольной системы линейных уравнений.

Пусть дана система $Ax = b$. Если она совместна, то можно выделить некоторое ее частное решение x^*. Если x — произвольное решение, то $Ax = b$, $Ax^* = b$, откуда $A(x - x^*) = \theta$, т.е. $x - x^*$ есть решение однородной системы. Поэтому $x = x^* + (x - x^*)$, т.е. произвольное решение x есть сумма частного решения x^* и некоторого решения однородной системы. Верно и обратное, сумма частного решения x^* и некоторого решения однородной системы есть решение исходной системы. Рассмотрим в качестве примера такую систему:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 = 4 \end{cases}$$

Легко видеть, что $(1;1;1)$ — частное решение.

Решая однородную систему, получим $x_3 = -5x_1$, $x_2 = -3x_1$. Общее решение однородной системы есть $\lambda(1;-3;-5)$, где λ — произвольное число. Следовательно, общее решение исходной системы будет иметь вид $(1;1;1) + \lambda(1;-3;-5)$.

Приведем теперь критерий совместности системы линейных уравнений. Эта теорема носит имя Кронекера – Капелли.

ТЕОРЕМА *Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы.*

□ Приведем два доказательства. Вспомним процесс приведения расширенной матрицы системы к ступенчатому виду. Мы отмечали, что система будет несовместной тогда и только тогда, когда в расширенной матрице ступенчатого вида найдется строка вида $(0\,0\,\ldots\,0 \mid \lambda)$, где $\lambda \neq 0$. Но ранг ступенчатой матрицы — это число ее ненулевых строк. Стало быть, система совместна тогда и только тогда, когда нет строк, нулевых справа, но не нулевых слева, а это и значит, что ранги обеих матриц равны.

Рассмотрим еще одно доказательство. Пусть $B_1, \ldots, B_n$ — столбцы матрицы, а b — столбец свободных членов. Легко видеть, что систему можно записать в виде: $x_1B_1 + \ldots + x_nB_n = b$. По определению линейной оболочки, система будет совместной, если $b \in \mathcal{L}(B_1, \ldots, B_n)$. Верно, конечно, и обратное. Имеем: система совместна $\Leftrightarrow b \in \mathcal{L}(B_1, \ldots, B_n) \Leftrightarrow \mathcal{L}(B_1, \ldots, B_n) = \mathcal{L}(B_1, \ldots, B_n, b) \Leftrightarrow \dim \mathcal{L}(B_1, \ldots, B_n) = \dim \mathcal{L}(B_1, \ldots, B_n, b) \Leftrightarrow$ ранг A равен рангу $(A \mid b)$, где A — матрица системы. ■

§7. Определители и их свойства.

Все матрицы, расматриваемые в этом параграфе, являются квадратными, если не оговорено противное. Пусть $A = ||a_{ij}||$ — матрица размера $n \times n$. Будем называть *молнией* набор из элементов этой матрицы, взятых по одному из каждой строки и из каждого столбца. Иногда будем также называть молнией произведение таких элементов. Всякая молния для матрицы A может быть записана в виде: $a_{1i_1}a_{2i_2}\ldots a_{ni_n}$, где $i_1 i_2 \ldots i_n$ — последовательность номеров столбцов. Так как каждый столбец участвует ровно один раз, то эта последовательность есть перестановка символов от 1 до n. Множество всех таких перестановок мы будем обозначать S_n. Если $\sigma \in S_n$ есть последовательность $i_1 i_2 \ldots i_n$, то i_k будем обозначать через $\sigma(k)$. Таким образом, общий вид молнии может быть записан как произведение $a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\ldots a_{n\sigma(n)}$, где $\sigma \in S_n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\sigma \in S_n$. Говорят, что пара символов $\sigma(i)$, $\sigma(j)$, где $1 \leq i < j \leq n$, образует *инверсию* в перестановке σ, если $\sigma(i) > \sigma(j)$. Перестановка называется *четной* или *нечетной* в зависимости от того, четно или нечетно число пар, образующих инверсию в данной перестановке.

Примеры.

1. Перестановка $1\,2\,\ldots\,n$ четна, т.к. число инверсий в ней равно нулю.

2. Перестановка $n\; n-1\,\ldots\,2\,1$ имеет $(n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1 = (n-1)n/2$ инверсий. Это число четно, если $(n-1)n$ делится на 4. Это возможно, если n при делении на 4 дает в остатке 0 или 1. В этих случаях данная перестановка четна. Если n дает в остатке 2 или 3, то она нечетна.

3. *Опишем один из способов подсчета* числа инверсий. Пусть дана перестановка. Для каждого i от 1 до n подсчитаем, сколько есть чисел, больших i, стоящих левее i. Сумма этих чисел равна общему числу инверсий. Например, перестановка 7 2 8 1 6 4 5 9 3 имеет $3+1+6+3+3+2+0+0+0=18$ инверсий, т.е. перестановка четна.

Через $\operatorname{sgn}\sigma$ будем обозначать число $(-1)^k$, где k — число инверсий. Очевидно, $\operatorname{sgn}\sigma$ есть $+1$, если σ четна и -1, если σ нечетна. Выражение $\operatorname{sgn}\sigma$ называется *знаком* перестановки σ.

Теперь мы можем сказать, что называется определителем квадратной матрицы A.

Определение. *Определителем*, или *детерминантом* квадратной матрицы A n-го порядка называется число, равное сумме всевозможных молний для матрицы A, взятых со знаком "плюс", если перестановка, соответствующая молнии, четна, и со знаком "минус", если она нечетна.

Обозначение для определителя матрицы A: $\det A$.

Данное определение можно представить в виде формулы:

$$\det A = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\dots a_{n\sigma(n)}.$$

Часто, когда требуется найти *определитель* данной матрицы A, вместо $\det A$ используют обозначение

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

При этом используют выражения: строки *определителя*, столбцы определителя и т.п., имея в виду строки или столбцы той матрицы, *определитель* которой рассматривается.

Примеры.

1. Пусть $n=1$, $A=(a_{11})$. Очевидно, $\det A = a_{11}$.

2. Пусть $n=2$. Тогда $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

3. Пусть $n=3$. Тогда $\det A = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}$.

Для нахождения определителей высших порядков пользоваться непосредственно формулой неудобно. Для описания более удобных способов нам понадобится ряд свойств определителей.

Вначале нам понадобится одно вспомогательное утверждение.

ЛЕММА *Если в перестановке поменять* местами два символа, то перестановка *изменит четность.*

□ Рассмотрим вначале случай, когда меняются местами два соседних символа. Если они образовывали инверсию, то после перемены порядка их следования они не будут образовывать инверсию и наоборот. Следовательно, число инверсий либо увеличится, либо уменьшится на 1, так как для всех остальных пар символов порядок их следования остается прежним.

Пусть теперь меняются местами символы α и β, между которыми стоят k символов $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$. Поменяем местами сначала α и γ_1, затем последовательно α и γ_2, $\ldots$, α и γ_k, α и β, β и γ_k, $\ldots$, β и γ_1. Всего применена $2k+1$ перемена мест соседних символов. В итоге символы α и β поменяются местами. Четность сменится нечетное число раз, т.е. станет противоположной. ■

Свойства определителей.

С1. Если поменять местами две строки определителя, то определитель сменит знак.

□ Пусть i-ая и j-ая строки меняются местами. Вместо молнии $a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\ldots a_{n\sigma(n)}$ мы получим молнию $a_{1\sigma(1)}\ldots a_{i\sigma(j)}\ldots a_{j\sigma(i)}\ldots a_{n\sigma(n)}$. По доказанной лемме, эта молния входит в новый определитель со знаком, противоположным тому, с которым старая молния входит в старый определитель. Следовательно, определитель сменит знак. ■

С2. Если строку определителя умножить на λ, то определитель умножится на λ.

□ В каждую молнию входит ровно один элемент из данной строки. Поэтому каждая молния, а значит и весь определитель, умножится на λ, согласно определению. ■

С3. Определитель, содержащий две одинаковые строки, равен нулю.

□ Поменяем две равные строки местами. Согласно С1, определитель сменит знак. С другой стороны, он должен остаться прежним. Следовательно, он равен нулю. ■

С4. Если строка определителя равна сумме двух строк, то определитель представляется в виде суммы определителей, в каждом из которых вместо данной строки стоит соответствующее слагаемое той суммы, в виде которой представлена данная строка.

□ Пусть $a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$ для всех j от 1 до n. Тогда пусть B и C соответственно — матрицы, получающиеся из A заменой i-ой строки на b_{ij} или c_{ij}. Мы имеем:

$$\begin{aligned}
\det A &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\ldots a_{n\sigma(n)}\\
&= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot a_{1\sigma(1)}\ldots a_{i\sigma(i)}\ldots a_{n\sigma(n)}\\
&= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\ldots (b_{i\sigma(i)} + c_{i\sigma_i})\ldots a_{n\sigma(n)}\\
&= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot a_{1\sigma(1)}\ldots b_{i\sigma(i)}\ldots a_{n\sigma(n)} + \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot a_{1\sigma(1)}\ldots c_{i\sigma(i)}\ldots a_{n\sigma(n)}\\
&= \det B + \det C. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Свойства 2 и 4 кратко можно выразить так: определитель линеен по каждой строке. Действительно, пусть $A_1, \ldots, A_n$ — строки определителя, $\Delta(A_1, \ldots, A_n)$ — сам определитель. Тогда С2 и С4 можно сформулировать так: $\Delta(A_1, \ldots, \lambda A_i, \ldots, A_n) = \lambda\Delta(A_1, \ldots, A_n)$, $\Delta(A_1 \ldots, B_i + C_i, \ldots, A_n) = \Delta(A_1, \ldots, B_i, \ldots, A_n) + \Delta(A_1, \ldots, C_i, \ldots, A_n)$.

C5. Пусть к некоторой строке определителя прибавили другую строку, умноженную на некоторое число. Тогда определитель не изменится.

□ Пусть к i-ой строке прибавили j-ую, умноженную на число λ. По свойствам 4, 2, 3 имеем: $\Delta(A_1, \ldots, A_i + \lambda A_j, \ldots, A_j, \ldots, A_n) = \Delta(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots, A_n) + \lambda\Delta(A_1, \ldots, A_j, \ldots, A_j, \ldots, A_n) = \Delta(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots, A_n)$. ■

Свойство C5 часто используется на практике при нахождении определителей. Сейчас мы исследуем случай равенства определителя нулю.

C6. Если строки определителя линейно зависимы, то он равен 0.

□ Пусть строки определителя линейно зависимы. Тогда согласно свойству 6 линейно зависимых систем, некоторая строка определителя выражается через остальные. Пусть $A_i = \lambda_1 A_1 + \ldots + \lambda_{i-1} A_{i-1} + \lambda_{i+1} A_{i+1} + \ldots + \lambda_n A_n$. Прибавим к i-ой строке последовательно все строки, кроме i-ой, где k-ая строка предварительно умножается на число $-\lambda_k$. Получим все нули в i-ой строке. Определитель с нулевой строкой равен нулю. Значит, ввиду C5, равен нулю и исходный определитель. ■

Обратное утверждение также справедливо, что будет доказано несколько позже.

Теперь мы хотим распространить свойства 1–6 со строк на столбцы. Для этого введем понятие транспонированной матрицы.

Оределение. Пусть B — произвольная матрица размером $m \times n$. Матрицей, *транспонированной к* B, обозначаемой B^T, называется матрица, у которой строки матрицы B записаны в столбцы. Говоря иначе, если $B = ||b_{ij}||$, то $B^T = ||y_{ij}||$, где $y_{ij} = b_{ji}$.

Пример.

$$\text{Пусть } B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 5 \\ 2 & 3. & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 6 & 4 \end{pmatrix}. \text{ Тогда } B^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 6 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Напомним однако, что хотя понятие транспонированной матрицы имеет смысл для любой матрицы, но понятие определителя для матриц, не являющихся квадратными, не имеет смысла.

Нам понадобится также понятие обратной перестановки.

Определение. Пусть $\sigma \in S_n$. Определим перестановку σ^{-1}, называемую *перестановкой, обратной к* σ. Положим $\sigma^{-1}(i) = k$, если $\sigma(k) = i$.

Пример. Пусть σ — перестановка 3 4 1 8 5 2 7 6; тогда σ^{-1} есть перестановка 3 6 1 2 5 8 7 4 (мы пишем на i-ом месте k, если на k-ом месте стоит i).

ЛЕММА *Перестановка, обратная данной, имеет ту же четность, т.е. для всех $\sigma \in S_n$ справедливо равенство* $\operatorname{sgn}\sigma = \operatorname{sgn}\sigma^{-1}$.

□ Пусть $i < j$, и $\sigma(i)$, $\sigma(j)$ — пара символов, образующих инверсию в σ. Обозначим $\sigma(i) = k$, $\sigma(j) = \ell$. По определению инверсии, $k > \ell$. Так как $i = \sigma^{-1}(k)$, $j = \sigma^{-1}(\ell)$, то $\ell < k$, $j > i$, и пара $\sigma^{-1}(\ell)$, $\sigma^{-1}(k)$ образует инверсию в σ^{-1}. Тем самым, число инверсий в σ не больше числа инверсий в σ^{-1}. Поскольку $(\sigma^{-1})^{-1} = \sigma$, то оно и не меньше. Значит, взаимно обратные перестановки имеют одинаковую четность. ■

ТЕОРЕМА *Определитель матрицы равен определителю транспонированной матрицы.*

□ Пусть $A = ||a_{ij}||$, тогда $A^T = ||y_{ij}||$, где $y_{ij} = a_{ji}$. По определению,

$$\begin{aligned} \det A^T &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot y_{1\sigma(1)}y_{2\sigma(2)}\dots y_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\dots a_{\sigma(n)n} \\ &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot a_{1\sigma^{-1}(1)}a_{2\sigma^{-1}(2)}\dots a_{n\sigma^{-1}(n)} = \det A, \end{aligned} \tag{2}$$

так как $\operatorname{sgn}\sigma = \operatorname{sgn}\sigma^{-1}$ по лемме, и σ^{-1} пробегает S_n, когда σ пробегает S_n. Теорема доказана. ■

Пользуясь этой теоремой, из свойств определителей 1–6 можно получить свойства 1а–6а с заменой строк на столбцы. Скажем, если мы хотим применить к матрице какое-то действие со столбцами, мы можем сначала транспонировать матрицу, проделать аналогичное действие со строками, а затем снова транспонировать матрицу. В дальнейшем мы будем использовать как сами свойства 1–6, так и их аналоги 1а–6а для столбцов.

§8. Миноры и алгебраические дополнения. Разложение определителя по строке (столбцу). Правило Крамера.

В этом параграфе будет рассмотрен преактический способ нахождения определителей высших порядков. Также будет дан критерий обратимости матрицы и предложен еще один из способов нахождения обратной матрицы.

Определение. Пусть дана квадратная матрица $A = ||a_{ij}||$ n-го порядка. Рассмотрим ее определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Минором M_{ij} определителя данной матрицы A мы называем определитель матрицы $(n-1)$-го порядка, получаемой из матрицы A вычеркиванием ее i-ой строки и j-го столбца. *Алгебраическим дополнением* A_{ij} элемента a_{ij} матрицы A назовем число $(-1)^{i+j}M_{ij}$, равное M_{ij}, если числа i и j имеют одинаковую четность, и равное $-M_{ij}$, если они имеют разную четность.

Пример. Пусть

$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда $M_{31} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 10$, $M_{23} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -35$. Отсюда $A_{31} = (-1)^{3+1}M_{31} = M_{31} = 10$, $A_{23} = (-1)^{2+3}M_{23} = -M_{23} = 35$.

ЛЕММА *Если все элементы i-ой строки матрицы A, за исключением элемента a_{ij}, равны нулю, то* $\det A = a_{ij}A_{ij}$.

□ Рассмотрим вначале случай элемента a_{nn}. Любая молния, не содержащая a_{nn}, равна нулю, так как по условию все элементы n-ой строки, кроме a_{nn}, равны нулю. Любая такая молния есть произведение a_{nn} и молнии из определителя M_{nn}. Обе молнии входят в соответствующие определители с одинаковым знаком, так как четность перестановки из S_n с символом n на конце равна четности перестановки из S_{n-1}, которая получается из данной удалением n. Поэтому $\det A = a_{nn}M_{nn} = a_{nn}A_{nn}$. Теперь рассмотрим общий случай.

Поменяем в матрице A данную i-ю строку с $(i+1)$-ой, затем с $(i+2)$-ой, и т.д., наконец, с n-ой. При этом будет применено $n-i$ перестановок строк, и ввиду свойства 1, определитель $n-i$ раз сменит знак. Если i-ую строку матрицы поставить на последнее место, не меняя порядка остальных строк, то определитель умножится на число $(-1)^{n-i}$. Аналогично, если j-ый столбец поставить на последнее место, не меняя порядка остальных столбцов, то определитель умножится на число $(-1)^{n-j}$. Пусть B — матрица, получаемая из A постановкой на последние места i-ой строки и j-го столбца. Тогда $\det B = (-1)^{n-i}\cdot(-1)^{n-j}\cdot\det A = (-1)^{i+j}\cdot\det A$. Ясно также, что $b_{nn} = a_{ij}$, и что минор для a_{ij} в A равен минору для b_{nn} в B.

Согласно доказанному выше, $\det B = a_{ij}M_{ij}$, откуда $\det A = (-1)^{i+j}\cdot\det B = (-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij} = a_{ij}A_{ij}$. ■

ТЕОРЕМА (о разложении определителя по строке). *Определитель матрицы равен сумме произведений элементов некоторой строки на свои алгебраические дополнения. Говоря иначе, если A — матрица n-го порядка, i — число от 1 до n, то*

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}.$$

Данная формула называется разложением определителя по i-ой строке.

□ Представим i-ю строку матрицы A в виде суммы n строк, где k-ое слагаемое есть строка, в которой на k-ом месте стоит число a_{ik}, а остальные числа равны нулю. По свойству 4 определителей, $\det A$ будет равен сумме n слагаемых, где k-ое слагаемое есть определитель матрицы, получающейся из A заменой i-ой строки на строку, в которой все элементы, за исключением a_{ik}, равны нулю. По доказанной нами лемме, k-ое слагаемое равно $a_{ik}A_{ik}$. Поэтому $\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$. ■

Аналогично формулируется и доказывается

ТЕОРЕМА (о разложении определителя по столбцу). *Определитель матрицы равен сумме произведений элементов некоторого столбца на свои алгебраические дополнения. Говоря иначе, если A — матрица n-го порядка, j — число от 1 до n, то* $\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$. *Данная формула называется разложением определителя по j-ому столбцу.* ■

Пример. Разложить по второму столбцу определитель

$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & a & -5 \\ 3 & b & 4 \\ -1 & c & 2 \end{vmatrix}$. Решение: $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & a & -5 \\ 3 & b & 4 \\ -1 & c & 2 \end{vmatrix} = -a\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} -$

$c\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -10a + 3b - 31c.$

Сейчас мы укажем практический способ вычисления определителей. Определители второго порядка вычисляются непосредственно по формулам. Для определителей более высокого порядка рекомендуется проводить вычисления с помощью элементарных преобразований строк или столбцов (см. §7, свойства 5 и 5а.). Сначала необходимо преобразовать определитель так, чтобы в некоторой строке или столбце все элементы, кроме одного, стали равны нулю. Затем надо разложить определитель по выбранной строке или по столбцу и свести задачу к вычислению определителя меньшего порядка.

Пример. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Решение:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -7 \\ -2 & -8 & -10 \\ -7 & -10 & -13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -7 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & 36 \end{vmatrix} =$$

$$-\begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 4 & 36 \end{vmatrix} = -16\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = -16 \cdot (-10) = 160.$$

Если умножить элементы строки (столбца) на алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца), то мы получим так называемое *фиктивное разложение*.

ТЕОРЕМА (о фиктивном разложении определителя). *Фиктивное разложение определителя по строке (столбцу) равно нулю, т.е. если $i \neq j$, то $a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{in}A_{jn} = 0$ (фиктивное разложение по i-ой строке) и $a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \ldots + a_{ni}A_{nj} = 0$ (фиктивное разложение по i-му столбцу).*

□ Докажем теорему для строк; для столбцов доказательство аналогично. Заменим в матрице A строку с номером j на строку с номером i. Определитель получившейся матрицы равен нулю. Если его разложить по j-ой строке, то мы получим равенство $0 = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{in}A_{jn}$. ■

Сейчас мы можем указать формулу для нахождения обратной матрицы.

ТЕОРЕМА (об обратной матрице). *Если определитель матрицы A отличен от нуля, то матрица A обратима, и обратная матрица может быть найдена по формуле:*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

□ Обозначим через A' матрицу из алгебраических дополнений элементов данной матрицы A, т.е. $A' = ||A_{ij}||$. Умножим матрицу A на $(A')^T$. Пусть $C = A(A')^T$; $C = ||c_{ij}||$. Тогда по определению произведения матриц, $c_{ij} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{in}A_{jn} = \det A \cdot \delta_{ij}$, где δ_{ij} — так называемый *символ Кронекера*, определяемый равенством:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

При этом мы также воспользовались определением транспонированной матрицы и теоремами о разложениях определителя по строке. Поскольку на пересечении i-ой строки и j-го столбца единичной матрицы стоит число δ_{ij}, то $A(A')^T = \det A \cdot E$. Стало быть, произведение A на $(\det A)^{-1} \cdot (A')^T$ равно E. Теперь перемножим $(A')^T$ и A. Обозначим $B = (A')^T A$; $B = ||b_{ij}||$. По определению произведения матриц, $b_{ij} = A_{1i}a_{1j} + A_{2i}a_{2j} + \ldots + A_{ni}a_{nj} = \det A \cdot \delta_{ij}$ с учетом определения транспонированной матрицы и теорем о разложении определителя по столбцу. Следовательно, произведение $(\det A)^{-1} \cdot (A')^T$ и A также равно E. Поэтому A обратима, и матрица A^{-1} равна $(\det A)^{-1} \cdot (A')^T$. Именно это теорема и утверждает. ■

Позднее будет доказано, что матрица с равным нулю определителем не имеет обратной.

Теорема об обратной матрице дает нам еще один способ нахождения обратной матрицы, удобный для обращения матриц порядка $n \leq 3$. Он состоит в следующем. Сначала для данной матрицы A выписываем матрицу M из миноров. Затем, меняя знаки на тех местах, где номера строки и столбца имеют разную четность, получаем матрицу A' из алгебраических дополнений. Остается ее транспонировать и разделить на число $\det A$. Тем самым будет найдена A^{-1}.

Примеры.

1. Найти матрицу, обратную данной матрице A.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, $M_{11} = 9$, $M_{12} = 4$, $M_{21} = -8$, $M_{22} = 3$. Тогда $M = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$, $(A')^T = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$. Поскольку $\det A = 3 \cdot 9 - (-8) \cdot 4 = 59$, то $A^{-1} = \frac{1}{59} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/59 & 8/59 \\ -4/59 & 3/59 \end{pmatrix}$.

2. Найти матрицу, обратную данной матрице A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Найдем миноры. Получим:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -10,\ M_{12} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 4,\ M_{13} = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -11,$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 10,\ M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -8,\ M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 7,$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -10,\ M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 4,\ M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = -1.$$

Находим матрицы M и A':

$$M = \begin{pmatrix} -10 & 4 & 11 \\ 10 & -8 & 7 \\ -10 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -10 & -4 & -11 \\ -10 & -8 & -7 \\ -10 & -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Теперь надо найти определитель матрицы A. Проще всего для этого разложить $\det A$ по какой-либо строке или столбцу. Для этого достаточно скалярно умножить строку (столбец) матрицы A на строку (столбец) с тем же номером матрицы A'. Например, перемножим третьи столбцы: $\det A = 2\cdot(-11)+0\cdot(-7)+(-2)\cdot(-1) = -20$. Осталось транспонировать A' и разделить на определитель. В итоге получим:

$$A^{-1} = -\frac{1}{20}\cdot\begin{pmatrix} -10 & -10 & -10 \\ -4 & -8 & -4 \\ -11 & -7 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/5 & 2/5 & 1/5 \\ 11/20 & 7/20 & 1/20 \end{pmatrix}.$$

Теперь, пользуясь теоремой об обратной матрице, сформулируем и докажем правило Крамера — формулы для нахождения решения системы из n уравнений с n неизвестными.

ТЕОРЕМА (правило Крамера) *Пусть дана система линейных уравнений:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\quad \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}.$$

Обозначим через Δ определитель матрицы этой системы; через Δ_i для $1 \le i \le n$ обозначим определитель, получаемый из Δ заменой i-го столбца на столбец свободных членов. Тогда
1) если $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение, которое находится по формулам: $x_1 = \Delta_1/\Delta$, $x_2 = \Delta_2/\Delta$, $\ldots$, $x_n = \Delta_n/\Delta$;
2) если $\Delta = 0$, и хотя бы для одного i имеем $\Delta_i \neq 0$, то система несовместна. □
Заметим вначале, что при $\Delta = \Delta_1 = \ldots = \Delta_n = 0$ теорема ничего не утверждает. В этом случае система может быть и совместной, и несовместной.

Запишем систему в матричном виде, как мы делали это в §6. Получим равенство $Ax = b$, которое затем умножим на матрицу $(A')^T$ слева. При доказательстве теоремы об обратной матрице было установлено, что $(A')^T A = \det A \cdot E = \Delta E$. Следовательно, мы получим равенство $\Delta x = (A')^T b$. Сравнивая i-ые компоненты получившихся равными столбцов, мы делаем вывод, что $\Delta x_i = A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \ldots + A_{ni}b_n = \Delta_i$, так как при разложении определителя Δ_i по i-му столбцу мы как раз и получим выражение $A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \ldots + A_{ni}b_n$. Тем самым при всех i от 1 до n имеет место равенство $\Delta x_i = \Delta_i$. Если $\Delta \neq 0$, то отсюда сразу находятся $x_i = \Delta_i/\Delta$, а если $\Delta = 0$, то в случае совместности системы все Δ_i должны быть равны нулю. ∎

Пример. С помощью правила Крамера решить систему:

$$\begin{cases} 4x_1 + 7x_2 = -5 \\ 3x_1 + 5x_2 = 11 \,. \end{cases}$$

Решение. Находим определители:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -1, \ \Delta_1 = \begin{vmatrix} -5 & 7 \\ 11 & 5 \end{vmatrix} = -102, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 47-5 & \\ 37 & 11 \end{vmatrix}.$$

Так как $\Delta \neq 0$, по правилу Крамера система имеет единственное решение: $x_1 = \Delta_1/\Delta = 102$, $x_2 = \Delta_2/\Delta = -59$. Ответ: $(102; -59)$.

В заключение этого параграфа докажем теорему об определителе произведения матриц.

ТЕОРЕМА (об умножении определителей). *Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению определителей этих матриц.*

□ Пусть A и B — матрицы n-го порядка, $C = AB$, $A = ||a_{ij}||$, $B = ||b_{ij}||$, $C = ||c_{ij}||$. Рассмотрим первую строку матрицы C. Поскольку $c_{1k} = a_{11}b_{1k} + a_{12}b_{2k} + \ldots + a_{1n}b_{nk}$, эту строку можно представить в виде суммы n строк, в качестве j-го слагаемого беря строку, у которой на k-ом месте стоит число $a_{1j}b_{jk}$. По свойству 4 определителя, справедливого и для случая нескольких слагаемых, мы можем разложить $\det C$ в сумму n определителей. Далее, в каждом из получившихся определителей проделаем аналогичную операцию со второй строкой, в результате чего $\det C$ окажется разложенным в сумму n^2 слагаемых и т.д. Когда на n-ом шаге мы проделаем аналогичную операцию с последней строкой каждого из определителей, входящих в сумму, мы в итоге получим разложение $\det C$ в сумму n^n определителей вида

$$\begin{vmatrix} a_{1i_1}b_{i_1 1} & a_{1i_1}b_{i_1 2} & \cdots & a_{1i_1}b_{i_1 n} \\ a_{2i_2}b_{i_2 1} & a_{2i_2}b_{i_2 2} & \cdots & a_{2i_2}b_{i_2 n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{ni_n}b_{i_n 1} & a_{ni_n}b_{i_n 2} & \cdots & a_{ni_n}b_{i_n n} \end{vmatrix} = a_{1i_1}a_{2i_2}\ldots a_{ni_n} \begin{vmatrix} b_{i_1 1} & \cdots & b_{i_1 n} \\ b_{i_2 1} & \cdots & b_{i_2 n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i_n 1} & \cdots & b_{i_n n} \end{vmatrix}.$$

Здесь $i_1, \ldots, i_n$ — произвольный набор индексов, каждый из которых принимает значения от 1 до n. Легко видеть, что если не все эти индексы попарно различны, соответствующий определитель имеет две одинаковые строки и потому равен нулю (§7,С3).

Будем рассматривать наборы попарно различных индексов. В этом случае $i_1, \ldots, i_n$ — перестановка из S_n. Для таких наборов мы переставим строки последнего определителя так, чтобы получить $\pm \det B$. Для этого найдем индекс 1 в перестановке, возьмем соотвествующую строку определителя и поставим ее на первое место, меняя ее поочередно с каждой из предыдущих строк. Затем поступим так же с индексом 2 и соответствующей ему строкой и т.д. В результате произойдет перемена знака определителя столько раз, сколько было инверсий в данной перестановке σ, т.е. получится число $\operatorname{sgn}\sigma \cdot \det B$. Следовательно, $\det C$ равно сумме выражений вида $\operatorname{sgn}\sigma \cdot a_{1i_1}a_{2i_2}\ldots a_{ni_n} \cdot \det B$ по всем $\sigma \in S_n$, т.е. $\det C = \det A \cdot \det B$. ∎

Ранее мы обещали доказать, что если определитель квадратной матрицы A равен нулю, то она не имеет обратной. Теперь мы можем это сделать. Пусть A обратима, и $AB = E$. Тогда $1 = \det E = \det(AB) = \det A \cdot \det B$, откуда $\det A \neq 0$. Следовательно, матрица обратима тогда и только тогда, когда ее определитель отличен от нуля.

§9. Линейные отображения векторных пространств.

Пусть V, W — векторные пространства.

Определение. Отображение $\varphi: V \to W$ называется *линейным отображением* пространства V в пространство W, если выполнены два условия:

1) для любых $x_1, x_2 \in V$ $\varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$

2) для любых $x \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$ $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$.

Если $x_1, \ldots, x_m \in V$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, а $\varphi: V \to W$ — линейное отображение, то $\varphi(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_m x_m) = \lambda_1\varphi(x_1) + \ldots + \lambda_m\varphi(x_m)$.

Рассмотрим вопрос о том, как можно задать линейное отображение. Пусть $\dim V = n$, $\dim W = m$. Выберем некоторый базис $e_1, \ldots, e_n$ в V и некоторый базис $f_1, \ldots, f_n$ в W. Если указать значения φ на всех векторах базиса V, то тем самым φ будет однозначно определено на всем V. Разложим векторы $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n) \in W$ по базису $f_1, \ldots, f_m$. Образуем матрицу A, записывая координаты вектора $\varphi(e_j)$ в базисе $f_1, \ldots, f_m$ в j-й столбец матрицы A.

Определение. Матрица $A = \|a_{ij}\|$ размером $m \times n$ называется *матрицей линейного отображения* φ для пары базисов: $e_1, \ldots, e_n$ в V и $f_1, \ldots, f_m$ в W, если

$$\begin{aligned}
\varphi(e_1) &= a_{11}f_1 + a_{21}f_2 + \ldots + a_{m1}f_m;\\
\varphi(e_2) &= a_{12}f_1 + a_{22}f_2 + \ldots + a_{m2}f_m;\\
\ldots & \quad \ldots\ldots\ldots\\
\varphi(e_n) &= a_{1n}f_1 + a_{2n}f_2 + \ldots + a_{mn}f_m.
\end{aligned}$$

Пусть задано линейное отображение $\varphi: V \to W$, указана пара базисов в V и W, и A — матрица φ в данной паре базисов. Исследуем такой вопрос. Пусть $v \in V$, $w = \varphi(v)$. Рассмотрим вектор-столбец $x \in \mathbb{R}^n$ из координат v в базисе $e_1, \ldots, e_n$ и вектор-столбец $y \in \mathbb{R}^m$ из координат w в базисе $f_1, \ldots, f_m$. Как связаны y и x между собой?

По условию, $v = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$. Тогда $w = \varphi(v) = x_1\varphi(e_1) + \ldots + x_n\varphi(e_n) = x_1(a_{11}f_1 + a_{21}f_2 + \ldots + a_{m1}f_m) + \ldots + x_n(a_{1n}f_1 + a_{2n}f_2 + \ldots + a_{mn}f_m) = (a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n)f_1 + (a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n)f_2 + \ldots + (a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n)f_m = y_1f_1 + y_2f_2 + \ldots + y_mf_m$. Сравнивая коэффициенты при базисных векторах, мы получаем связь между

y и x, которая в матрично-векторной записи имеет вид $y = Ax$ (убедитесь в этом самостоятельно, перемножая матрицы A и x).

Пусть даны линейные отображения $\varphi: V \to W$, $\psi: W \to U$. Рассмотрим их композицию $\psi\varphi: V \to U$. Выберем в пространствах V, W, U базисы $e_1, \ldots, e_n$; $f_1, \ldots, f_m$; $g_1, \ldots, g_k$ соответственно. Пусть A — матрица φ, B — матрица ψ, а C — матрица $\psi\varphi$ в соответствующей паре базисов. Рассмотрим связь между ними. Для этого введем обозначения: пусть $v \in V$, положим x, y, z — векторы-столбцы из координат векторов v, $\varphi(v)$, $\psi\varphi(v)$ соответственно.

По доказанному выше, $y = Ax$, $z = By$, $z = Cx$. Следовательно, $Cx = z = By = B(Ax) = (BA)x$. Равенство $Cx = BAx$ справедливо для любого $x \in \mathbf{R}^n$. Выбирая в качестве x векторы стандартного базиса в $\mathbf{R}^n$, получим, что столбцы матриц C и BA совпадают. Значит, $C = BA$.

Резюмируем сделанные рассуждения: если A — матрица φ, B — матрица ψ, то BA — матрица композиции $\psi\varphi$.

Введем понятия ядра и образа линейного отображения.

Определение. Пусть $\varphi: V \to W$ — линейное отображение. *Ядром* линейного отображения φ называется множество векторов $\operatorname{Ker}\varphi = \{v \in V \mid \varphi(v) = \theta\}$. *Образом* φ называется множество векторов $\operatorname{Im}\varphi = \{w \in W \mid (\exists v \in V) w = \varphi(v)\}$.

Мы предлагаем читателю в качестве упражнения убедиться в том, что $\operatorname{Ker}\varphi$ есть подпространство в V, а $\operatorname{Im}\varphi$ — подпространство в W. Установим связь между размерностями ядра и образа.

ТЕОРЕМА $\dim\operatorname{Ker}\varphi + \dim\operatorname{Im}\varphi = \dim V$.

□ Выберем базис $h_1, \ldots, h_k$ в пространстве $\operatorname{Im}\varphi$. Рассмотрим прообразы $g_1, \ldots, g_k$ этих элементов в V. Выберем также базис $\operatorname{Ker}\varphi$: $e_1, \ldots, e_l$. Проверим, что векторы $g_1, \ldots, g_k, e_1, \ldots, e_l$ образуют базис в V.

Установим сначала линейную независимость этой системы. Пусть $\alpha_1 g_1 + \ldots + \alpha_k g_k + \beta_1 e_1 + \ldots + \beta_l e_l = \theta$. Применяя φ к обеим частям, получим $\alpha_1 h_1 + \ldots + \alpha_k h_k = \theta$, откуда $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$, так как $h_1, \ldots, h_k$ — базис. Но тогда $\beta_1 e_1 + \ldots + \beta_l e_l = \theta$, и $\beta_1 = \ldots = \beta_l = 0$, так как $e_1, \ldots, e_l$ — базис. Мы получили, что все коэффициенты равны нулю, т.е. наша система линейно независима.

Теперь докажем, что любой вектор $v \in V$ можно разложить по векторам нашей системы. Так как $\varphi(v) \in \operatorname{Im}\varphi$, то для некоторых чисел $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ справедливо равенство $\varphi(v) = \gamma_1 h_1 + \ldots + \gamma_k h_k$. Рассмотрим вектор $w = v - \gamma_1 g_1 - \ldots - \gamma_k g_k$. Очевидно, $\varphi(w) = \varphi(v) - \gamma_1 h_1 - \ldots - \gamma_k h_k = \theta$. По определению, $w \in \operatorname{Ker}\varphi$. Стало быть, w можно разложить по векторам $e_1, \ldots, e_l$. Так как $v = w + \gamma_1 g_1 + \ldots + \gamma_k g_k$, то v можно разложить по векторам системы $g_1, \ldots, g_k, e_1, \ldots, e_l$, что и требовалось доказать. ■

Часто рассматривается случай, когда $V = W$, т.е. φ есть линейное отображение пространства V в себя. В этом случае φ называют *линейным преобразованием* пространства V. Матрицей линейного преобразования φ в базисе $e_1, \ldots, e_n$ пространства V называют матрицу линейного отображения φ для пары базисов $e_1, \ldots, e_n$ и $e_1, \ldots, e_n$.

Пример. Пусть V — пространство многочленов степени не выше 3. Выберем базис в V: $e_1 = t^3$, $e_2 = t^2$, $e_3 = t$, $e_4 = 1$. Рассмотрим отображение $\varphi: V \to V$ формулой

$\varphi(f) = f'$, сопоставляющее многочлену его производную. Легко видеть, что φ — линейное преобразование пространства V. Найдем его матрицу в базисе e_1, e_2, e_3, e_4. Имеем: $\varphi(e_1) = 3t^2 = 3e_2$, $\varphi(e_2) = 2t = 2e_3$, $\varphi(e_3) = 1 = e_4$, $\varphi(e_4) = 0 = \theta$. Следовательно, матрица имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Выясним теперь вопрос о том, как связаны матрицы одного и того же линейного преобразования в разных базисах.

Определение. Пусть даны два базиса в пространстве V: $e_1, \ldots, e_n$ и $e'_1, \ldots, e'_n$. *Матрицей перехода* от первого базиса ко второму будем называть матрицу $T = \|t_{ij}\|$ размером $n \times n$, по столбцам которой стоят координаты векторов второго базиса в первом базисе.

Пример. Пусть e_1, e_2 — базис, $e'_1 = e_1 + 3e_2$, $e'_2 = 2e_1 - 5e_2$ — новый базис. Тогда матрица перехода T от первого базиса ко второму имеет вид

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим вопрос о связи координат вектора в двух базисах.

ТЕОРЕМА *Пусть x — вектор-столбец из координат вектора v в базисе $e_1, \ldots, e_n$, x' — вектор-столбец из координат этого же вектора v в базисе $e'_1, \ldots, e'_n$, а T — матрица перехода от первого базиса ко второму. Тогда справедливо равенство $x = Tx'$.*

□ Пусть $v = x'_1 + \ldots + x'_n e'_n$. Тогда $v = x'_1(t_{11}e_1 + \ldots + t_{n1}e_n) + \ldots + x'_n(t_{1n}e_1 + \ldots + t_{nn}e_n) = (t_{11}x'_1 + \ldots + t_{1n}x'_n)e_1 + \ldots + (t_{n1}x'_1 + \ldots + t_{nn}x'_n)e_n$, откуда $x_i = t_{i1}x'_1 + \ldots + t_{in}x'_n$. В матричной записи имеем $x = Tx'$. ■

Теперь можно установить связь между матрицами одного и того же линейного преобразования в разных базисах.

ТЕОРЕМА *Пусть A и B — матрицы линейного преобразования φ пространства V в базисах $e_1, \ldots, e_n$ и $e'_1, \ldots, e'_n$ этого пространства соответственно, T — матрица перехода от первого базиса ко второму. Тогда справедливо равенство $B = T^{-1}AT$.*

□ Пусть M — матрица перехода от второго базиса к первому. В обозначениях предыдущей теоремы имеем: $x = Tx'$, $x' = Mx$. Это дает нам возможность заключить, что $x = (TM)x$, $x' = (MT)x'$. Так как векторы x' и x пробегают все множество векторов-столбцов арифметического n-мерного пространства, то $MT = E$. Следовательно, T обратима, и $M = T^{-1}$.

Пусть x — вектор-столбец координат вектора $v \in V$ в первом базисе, а x' — во втором базисе. Для вектора $\varphi(v)$ обозначим через y, y' соответственно векторы-столбцы его координат в этих базисах. Тогда, согласно доказанному ранее, $y = Ax$, $y' = Bx'$. Поскольку $x = Tx'$, $y = Ty'$, $y' = T^{-1}y$, то $y' = T^{-1}y = T^{-1}Ax = T^{-1}ATx' = Bx'$. Следовательно, $B = T^{-1}AT$. ■

Пример. Пусть $e_1' = -2e_1 + 3e_2$, $e_2' = 5e_1 - 6e_2$; $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ — матрица линейного преобразования φ пространства V в базисе e_1, e_2. Требуется найти матрицу B этого же преобразования в базисе e_1', e_2'.

Решение. По определению матрицы перехода, $T = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$. Способом, указанным в §8, найдем $T^{-1} = (1/3) \cdot \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Согласно теореме, находим матрицу:

$$B = T^{-1}AT = (1/3)\cdot\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 372 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} = (1/3)\cdot\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 372 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -21 & 45 \\ -4 & 10 \end{pmatrix} =$$

$$= (1/3) \cdot \begin{pmatrix} -146 & 320 \\ -71 & 155 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -146/3 & 320/3 \\ -71/3 & 155/3 \end{pmatrix}.$$

§10. Собственные векторы и собственные значения линейных преобразований и матриц.

Сформулируем лемму, которая подытоживает рассуждения из предыдущих параграфов и которая понадобится нам в дальнейшем.

ЛЕММА (о вырожденной матрице) *Пусть A — матрица размером $n \times n$. Следующие условия равносильны друг другу:*

1. *Определитель матрицы A равен нулю.*
2. *Матрица A не обратима.*
3. *Ранг матрицы A меньше n.*
4. *Строки матрицы A линейно зависимы.*
5. *Столбцы матрицы A линейно зависимы.*
6. *Однородная система линейных уравнений от n неизвестных с матрицей A имеет ненулевое решение (т.е. не все значения неизвестных равны нулю).*

□ Равносильность условий 1 и 2 доказана в конце §8. Заметим, что ранг матрицы n-го порядка всегда не больше n, так как и пространство строк, и пространство столбцов имеют размерность не более n, поскольку они являются подпространствами в $\mathbf{R}^n$ (см. теоремы о размерности $\mathbf{R}^n$ и о размерности подпространства в §2). Далее, если строки (столбцы) линейно независимы, то они образуют базис в пространстве строк (столбцов), и ранг матрицы равен n (см. теоремы о числе векторов базиса в конце §2 и теорему о ранге матрицы в §4). Верно и обратное: если строки (столбцы) линейно зависимы, то их линейная оболочка имеет размерность меньше n. Следовательно, условия 3, 4, и 5 равносильны друг другу.

Вспомним доказательство теоремы Кронекера – Капелли в конце §6. Однородную систему линейных уравнений можно записать в векторном виде: $B_1x_1 + \ldots + B_nx_n = \theta$, где $B_1, \ldots, B_n$ — столбцы матрицы. Из определения линейной зависимости системы векторов следует, что наши условия 5 и 6 равносильны.

Свойство определителей С6 в §7 утверждает, что из условия 4 следует условие 1. Нам теперь достаточно проверить, что из условия 1 следует условие 3. Для этого заметим, что любые элементарные преобразования как строк, так и столбцов, не меняют свойства определителя быть равным нулю. При доказательстве теоремы о ранге матрицы было установлено, что с помощью ЭП строк и столбцов матрица приводится к стандартному виду. Если определитель был равен нулю в начале, то он будет таковым и в конце. Но тогда ранг не равен n, так как стандартная матрица ранга n равна E, а определитель E равен 1. Следовательно, ранг матрицы меньше n. ■

Дадим теперь определение собственных векторов и собственных значений линейного преобразования.

Определение. Пусть $\varphi: V \to V$ — линейное преобразование пространства V. Вектор $v \neq \theta$ пространства V называется *собственным вектором* преобразования φ, если существует такое $\lambda \in \mathbb{R}$, что $\varphi(v) = \lambda v$.

Число λ называется *собственным значением* преобразования φ, соответствующим собственному вектору v. (Заметим, что оно однозначно определено, так как $v \neq \theta$, и из $\lambda v = \mu v$ следует $\lambda = \mu$).

Определение. Пусть $A = \|a_{ij}\|$ — квадратная матрица n-го порядка. *Характеристическим многочленом* матрицы A называется многочлен

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}.$$

Число λ называется *собственным значением* матрицы A, если λ есть корень характеристического многочлена, т.е. $P_A(\lambda) = 0$.

Пример. Пусть $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Тогда $P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (3 - \lambda)(-1 - \lambda) - 5 = (\lambda - 3)(\lambda + 1) - 5 = \lambda^2 - 2\lambda - 8$. Корни этого многочлена числа -2 и 4 и есть все собственные значения матрицы A.

ТЕОРЕМА *Пусть A и B — сопряженные квадратные матрицы n-го порядка, т.е. существует обратимая матрица T n-го порядка такая, что $AT = TB$. Тогда характеристические многочлены матриц A и B совпадают.*

□ $P_B(\lambda) = \det(B - \lambda E) = \det(T^{-1}AT - \lambda E) = \det(T^{-1}AT - \lambda T^{-1}T) = \det(T^{-1}(A - \lambda E)T) = \det T^{-1} \cdot \det(A - \lambda E) \cdot \det T = P_A(\lambda) \cdot \det T^{-1} \cdot \det T = P_A(\lambda) \cdot \det(T^{-1}T) = P_A(\lambda)$. Тем самым доказано, что при любом λ значения многочленов P_A и P_B совпадают. Отсюда следует, что сами многочлены равны, как известно из курса алгебры. ■

Теперь мы можем ввести понятие характеристического многочлена линейного преобразования φ. Пусть φ — линейное преобразование пространства V. Выберем некоторый базис в V и пусть A — матрица φ в этом базисе. Если выбрать какой-либо другой базис и взять матрицу B того же преобразования φ в нем, то она будет сопряжена A, и по доказанной теореме, характеристические многочлены матриц A и B равны. Это значит, что характеристический многочлен не зависит от выбора базиса, и можно принять за характеристический многочлен P_φ линейного преобразования φ характеристический многочлен его матрицы в произвольном базисе.

ТЕОРЕМА *Пусть $\varphi(v) = \lambda v$, $v \neq \theta$, т.е. v — собственный вектор преобразования φ с собственным значением λ. Пусть A — матрица φ в некотором базисе, x — вектор-столбец из координат вектора v в этом базисе. Тогда $Ax = \lambda x$. Обратно, из условия $Ax = \lambda x$ следует, что $\varphi(v) = \lambda v$. Далее, если λ — собственное значение матрицы A, то λ — собственное значение перобразования φ.*

□ Если x — вектор-столбец координат v, то Ax есть вектор-столбец координат $\varphi(v)$. Отсюда следует первое утверждение и обратное к нему. Далее, если λ есть собственное значение матрицы A, то $\det(A - \lambda E) = 0$, и по теореме о вырожденной матрице, однородная система линейных уравнений с матрицей $A - \lambda E$ имеет ненулевое решение x. Тогда $Ax = \lambda x$, $x \neq \theta$, и если v — вектор, столбец координат которого есть x, то $\varphi(v) = \lambda v$, и λ является собственным значением φ. ■

Заметим, что всякая матрица A n-го порядка задает естественным образом линейное преобразование φ пространства $\mathbf{R}^n$, задаваемое формулой $\varphi(x) = Ax$. Очевидно, A будет матрицей φ в стандартном базисе. При этом $x \neq \theta$ будет собственным вектором φ, соответствующим собственному значению λ, тогда и только тогда, когда $Ax = \lambda x$, или $(A - \lambda E)x = \theta$. При этом мы можем говорить о собственных значениях и собственных векторах самой матрицы A.

Пример. Найти собственные векторы и собственные значения матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}.$$

Решение. Найдем сначала характеристический многочлен матрицы:

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 4 \\ 4 & -7-\lambda & 8 \\ 6 & -7 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-7-\lambda)(7-\lambda) - 144 - 112 +$$

$$+24(7+\lambda) + 12(7-\lambda) + 56(1-\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 49) - 256 + 168 + 24\lambda + 84 - 12\lambda + 56 - 56\lambda =$$

$$= -\lambda^3 + \lambda^2 + 49\lambda - 49 + 52 - 44\lambda = -\lambda^3 + \lambda^2 + 5\lambda + 3.$$

Теперь найдем корни характеристического многочлена. Решаем кубическое уравнение $\lambda^3 - \lambda^2 - 5\lambda - 3 = 0$. Для этого проверим числа ± 1, ± 3. Число $\lambda = -1$ будет корнем уравнения. Разделим многочлен $\lambda^3 - \lambda^2 - 5\lambda - 3$ на многочлен $\lambda + 1$:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
\lambda^3 & -\lambda^2 & -5\lambda & -3 & \lambda+1 \\
\cline{5-5}
\lambda^3 & +\lambda^2 & & & \lambda^2-2\lambda-3 \\
\cline{1-2}
 & -2\lambda^2 & -5\lambda & & \\
 & -2\lambda^2 & -2\lambda & & \\
\cline{2-3}
 & & -3\lambda & -3 & \\
 & & -3\lambda & -3 & \\
\cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}
$$

Далее решаем уравнение $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$. Его корни — числа 3 и -1. В итоге, собственные значения таковы: $\lambda_1 = \lambda - 2 = -1$, $\lambda_3 = 3$.

Теперь для каждого из значений λ найдем собственные векторы.

а) $\lambda = -1$. Мы найдем матрицу $A - \lambda E$ и решим однородную систему с этой матрицей:

$$A - \lambda E = A + E = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 4 & -6 & 8 \\ 6 & -7 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Имеем $x_2 = 2x_3$, $2x_1 = 3x_2 - 4x_3 = 2x_3$, $x_1 = x_3$. Общее решение $(x_3, 2x_3, x_3)$.

Запишем получившийся вектор в виде столбца, обозначая параметр x_3 через c и учитывая, что собственный вектор отличен от нуля. При $\lambda = -1$ мы имеем собственные векторы

$$c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c \neq 0.$$

б) $\lambda = 3$. Поступаем аналогично:

$$A - \lambda E = A - 3E = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 \\ 4 & -10 & 8 \\ 6 & -7 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 \\ 0 & -16 & 16 \\ 0 & -16 & 16 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Имеем $x_2 = x_3$, $2x_1 = -3x_2 + 4x_3 = x_3$, $x_1 = x_3/2$. Общее решение $(x_3/2, x_3, x_3)$. Обозначая $x_3/2$ через c, имеем собственные векторы вида

$$c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad c \neq 0.$$

Ответ. Собственные значения: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 3$. Собственные векторы:

$$c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c \neq 0 \text{ при } \lambda = -1 \quad \text{и} \quad c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad c \neq 0 \text{ при } \lambda = 3.$$

§11. Скалярное произведение. Евклидовы пространства.

Пусть V — векторное пространство.

Определение. *Скалярным произведением* на V называется функция, которая каждой паре векторов x, y из V ставит в соответствие число $\langle x, y \rangle \in \mathbf{R}$, причем выполняются следующие аксиомы:

1. $\forall x \in V \quad \langle x, x \rangle \geq 0$, причем $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \theta$;
2. $\forall x, y \in V \quad \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$;
3. $\forall x, y, z \in V \quad \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$;
4. $\forall x, y \in V \ \forall \lambda \in \mathbf{R} \quad \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$.

Аксиомы 3 и 4 говорят о том, что скалярное произведение линейно по первому аргументу. Поскольку по аксиоме 2 скалярное произведение симметрично, то оно линейно и по второму аргументу. Например, $\langle 2a + 3b, c - 4d \rangle = 2\langle a, c \rangle + 3\langle b, c \rangle - 8\langle a, d \rangle - 12\langle b, d \rangle$.

Линейное пространство с заданным на нем скалярным произведением называется *евклидовым пространством.*

Пример. Зададим в пространстве $\mathbf{R}^n$ скалярное произведение следующим образом: для $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, \dots, y_n)$ положим $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$. Советуем читателю в качестве упражнения проверить аксиомы 1 – 4 для этого случая. Если не оговорено противное, мы будем считать, что в пространстве $\mathbf{R}^n$ рассматривается именно это скалярное произведение.

Замечание. В одном и том же линейном пространстве, вообще говоря, существует много скалярных произведений.

Определение. Пусть V — евклидово пространство. Векторы x и y из V называются *ортогональными*, если $\langle x, y \rangle = 0$.

Система векторов $x_1, \dots, x_k \in V$ называется *ортогональной*, если среди векторов системы нет нулевых, и все векторы попарно ортогональны друг другу.

ТЕОРЕМА *Ортогональная система векторов линейно независима.*

$\square$ Пусть $\langle x_i, x_j \rangle = 0$ при $i \neq j$. Если $x = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k = \theta$, то $0 = \langle x, x_i \rangle = \lambda_1 \langle x_1, x_i \rangle + \ldots + \lambda_k \langle x_k, x_i \rangle = \lambda_i \langle x_i, x_i \rangle$. Так как $x_i \neq \theta$, по аксиоме 1 скалярного произведения имеем $\langle x_i, x_i \rangle \neq 0$, откуда $\lambda_i = 0$ при всех i. Это и означает линейную независимость системы. $\blacksquare$

Определение. *Длиной* вектора x евклидова пространства V называется число $||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

ТЕОРЕМА (неравенство Коши - Буняковского) *Для любых векторов x, y евклидова пространства справедливо неравенство*

$$\langle x, y \rangle \leq ||x|| \cdot ||y||.$$

□ Для любого $t \in \mathbb{R}$ по аксиоме 1 имеем: $\langle x - ty, x - ty \rangle \geq 0$. Раскроем скобки: $t^2\langle y, y \rangle - 2t\langle x, y \rangle + \langle x, x \rangle \geq 0$. Мы можем считать, что $y \neq \theta$, так как в противном случае неравенство очевидно. Тогда $\langle y, y \rangle > 0$, и квадратный трехчлен от t имеет не положительный дискриминант (иначе трехчлен имел бы два корня и был бы отрицателен в любой точке между корнями). Итак, $D = 4\langle x, y \rangle^2 - 4\langle x, x \rangle\langle y, y \rangle \leq 0$, откуда $\langle x, y \rangle^2 \leq ||x||^2||y||^2$, и $|\langle x, y \rangle| \leq ||x|| \cdot ||y||$. ■

Если векторы x и y ненулевые, то выражение

$$\frac{\langle x, y \rangle}{||x|| \cdot ||y||}$$

принимает значение от -1 до 1. Поэтому существует единственное значение $\varphi \in [0; \pi]$ такое, что $\cos\varphi = < x, y > /(||x|| \cdot ||y||)$. Такое число φ называется *углом* между (ненулевыми) векторами x и y и обозначается $\widehat{x, y}$. Угол будет острым, прямым или тупым в зависимости от того, больше, равно или меньше нуля число $\langle x, y \rangle$.

Пример. Найти в $\mathbb{R}^4$ угол между векторами $a = (3; -2; 1; -1)$ и $b = (2; 1; 1; -1)$.

Найдем $\langle a, b \rangle = 6 - 2 + 1 + 1 = 6$. Далее, $||a||^2 = \langle a, a \rangle = 9 + 4 + 1 + 1 = 15$, $||b||^2 = \langle b, b \rangle = 4 + 1 + 1 + 1 = 7$, откуда $||a|| = \sqrt{15}$, $||b|| = \sqrt{7}$, $\cos\widehat{a, b} = 6/\sqrt{105} = 2\sqrt{105}/35$, и $\widehat{a, b} = \arccos 2\sqrt{105}/35$.

Определение. Система векторов евклидова пространства называется *ортонормированной*, если она ортогональна, и все ее векторы имеют длину 1.

Пример. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ с определенным ранее скалярным произведением стандартный базис $e_1, \ldots, e_n$ является ортонормированной системой.

Если ненулевой вектор x поделить на его длину, то мы получим вектор длины 1. Действительно, если $\lambda = 1/||x||$, то $||\lambda x||^2 = \langle \lambda x, \lambda x \rangle = \lambda^2\langle x, x \rangle = \lambda^2||x||^2 = 1$, и $||\lambda x|| = 1$. Следовательно, из любой ортогональной системы можно получить ортонормированную, поделив каждый вектор на его длину.

ТЕОРЕМА *В любом (конечномерном) евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.*

В силу предыдущего замечания, достаточно доказать существование ортогонального базиса. Пусть имеется какая-либо линейно независимая система векторов $a_1, \ldots, a_n$; мы построим по ней систему $b_1, \ldots, b_n$ из попарно ортогональных векторов, имеющую ту же линейную оболочку. При этом мы будем вести индукцию по n; используемый процесс носит название "процесс ортогонализации Грама - Шмидта".

Положим $b_1 = a_1$. Далее, пусть уже построены попарно ортогональные векторы $b_1, \ldots, b_k$ такие, что $\mathcal{L}(b_1, \ldots, b_k) = \mathcal{L}(a_1, \ldots, a_k)$. Вектор b_{k+1} будем искать в виде $a_{k+1} + \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_k b_k$. При этом $\langle b_{k+1}, b_i \rangle = \langle a_{k+1}, b_i \rangle + \lambda_1\langle b_1, b_i \rangle + \ldots + \lambda_k\langle b_k, b_i \rangle = \langle a_{k+1}, b_i \rangle + \lambda_i\langle b_i, b_i \rangle$. Если $b_i \neq \theta$, то полагаем $\lambda_i = -\langle a_{k+1}, b_i \rangle / \langle b_i, b_i \rangle$. При этом в любом случае окажется, что $\langle b_{k+1}, b_i \rangle = 0$ (если $b_i \neq \theta$, то это очевидно).

Итак, новый вектор b_{k+1} ортогонален остальным. Проверим, что линейные оболочки $\mathcal{L}(a_1, \ldots, a_k, a_{k+1})$ и $\mathcal{L}(b_1, \ldots, b_k, b_{k+1})$ равны. Достаточно рассмотреть векторы a_{k+1} и b_{k+1}. Ясно, что $a_{k+1} = b_{k+1} - (\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_k b_k) \in \mathcal{L}(b_1, \ldots, b_k, b_{k+1})$, и $b_{k+1} = a_{k+1} + \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_k b_k$ принадлежит $\mathcal{L}(a_1, \ldots, a_k, a_{k+1})$, так как векторы

$b_1, \ldots, b_k$ выражаются через $a_1, \ldots, a_k$. Теперь доказано, что линейные оболочки совпадают.

Если в начале был взят за основу базис пространства $a_1, \ldots, a_n$, то в конце получится система из попарно ортогональных векторов $b_1, \ldots, b_n$. В ней не может быть нулевых векторов, поскольку иначе, удаляя их, мы получили бы линейно независимую систему, линейная оболочка которой есть все пространство. Но такая система по определению есть базис, а все базисы нашего пространства состоят из n векторов. Таким образом, в итоге процесса ортогонализации мы получим ортогональный базис пространства. ■