МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ВОЛОГОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Б. С. Губа

Элементы теории графов

Вологда — 2001

Введение

Настоящее учебное пособие представляет собой часть курса "Дискретная математика", читаемого для студентов IV курса отделения прикладной математики ВГПУ. Затрагивается ряд вопросов, традиционных для теории графов: эйлеровы и гамильтоновы графы, деревья, планарные графы, раскраска графов, теорема Холла и некоторые другие вопросы. Особенностью нашего подхода является использование определения графа, предложенного Серром. Достоинством этого определения является его универсальность. Мы уделяем особое внимание понятию пути в графе и понятиям, которые определяются на его основе. В пособие также включена подборка задач, отражающая содержание большинства разделов. Поскольку многие понятия и приемы из теории графов нередко используются при решении олимпиадных задач, некоторые главы данного пособия представляются полезными и для учащихся старших классов средней школы. В большинстве случаев для понимания изложенного материала не требуется специальных знаний, хотя мы здесь свободно используем некоторые алгебраические и теоретико-множественные понятия.

1 Некоторые задачи, решаемые при помощи графов

Рассмотрим классическую задачу, решение которой удобно излагать при помощи понятия графа.

Задача 1 *Доказать, что в любой компании из шести человек найдутся либо трое попарно знакомых между собой, либо трое попарно не знакомых.*

Изобразим каждого человека точкой плоскости. Если два человека между собой знакомы, то соединим их линией красного цвета, а если не знакомы, то синего. Мы получим граф с 6 вершинами. Легко видеть, что мы провели 15 линий. Эти линии называются ребрами графа. Каждое ребро раскрашено в один из двух цветов. Требуется доказать, что найдется треугольник (с криволинейными сторонами), все стороны которого раскрашены в один и тот же цвет.

Рассмотрим одну из вершин графа. Она соединена ровно с пятью вершинами. Понятно, что найдутся по крайней мере три вершины, которые соединены с исходной при помощи ребер одного и того же цвета. Если какие-либо две из этих трех вершин соединены ребром того же цвета, то найдется одноцветный треугольник. В противном случае все три вершины соединены между собой ребрами противоположного цвета, и тогда они образуют одноцветный треугольник.

Задача 2 *Доказать, что в компании из пяти человек не обязательно найдутся трое попарно знакомых между собой или попарно не знакомых.*

Проще всего решить эту задачу, предъявив соответствующий граф.

Задачи подобного типа называются задачами Рамсея. Предложим еще две задачи такого типа.

Задача 3 *В конференции участвуют 17 ученых. Любые двое из них переписываются между собой по одной из трех тем. Доказать, что найдутся трое ученых, которые попарно переписываются друг с другом на одну и ту же тему.*

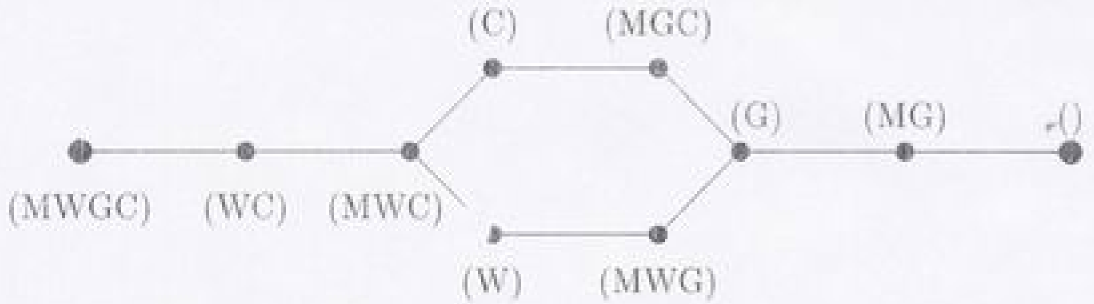
Задача 4 *Доказать, что в любой компании из 18 человек найдутся либо четверо попарно знакомых между собой, либо четверо попарно не знакомых.*

Эти задачи также можно решить при помощи графов. Рассмотрим еще один пример — известную задачу про волка, козу и капусту.

Задача 5 *Мужику требуется перевезти через реку волка, козу и капусту. В его распоряжении имеется лодка, в которую вместе с мужиком можно поместить либо волка, либо козу, либо капусту. При этом не разрешается оставлять волка наедине с козой, а козу наедине с капустой. Как мужику организовать переправу?*

Разумеется, можно решить эту задачу и без помощи графов, но мы хотим продемонстрировать общий метод. Обычно графы оказываются полезными в следующей ситуации. Пусть имеется некоторый набор данных, который мы будем называть *позицией* или *конфигурацией*. В нашем случае позиция может быть описана указанием того, на каком из двух берегов находится каждое из четырех действующих лиц: мужик, волк, коза и капуста. Нам также известны правила, по которым от одних конфигураций можно переходить к другим. Такие правила будем называть *ходами* или *преобразованиями*. Естественным образом можно построить граф, вершинами которого служат все возможные конфигурации. Вершины графа можно изображать точками плоскости, указывая вблизи каждой точки краткое описание соответствующей позиции. Каждый ход можно изобразить стрелкой, идущей из одной позиции в другую. Такие стрелки мы будем называть ориентированными ребрами графа. Решая задачу в конкретном случае, мы будем избегать "запрещенных" конфигураций, то есть тех, в которых коза находится наедине либо с волком, либо с капустой.

Будем обозначать мужика, волка, козу и капусту буквами M, W, G, C соответственно. Задавая конфигурацию, будем перечислять в круглых скобках всех, кто находится на том берегу, с которого изначально осуществлялась переправа. Исходная конфигурация имеет вид (MWGC), и мы должны, построив граф, найти путь из нее в вершину, соответствующую конфигурации (), в которой все переправились на противоположный берег. Путь состоит из ориентированных ребер (стрелок). Для начала перечислим все позиции, которые могут у нас возникнуть: (MWGC), (MWG), (MWC), (MGC), (MG), (WC), (W), (G), (C), (). Теперь проведем все возможные ребра, получая требуемый граф. Заметим, что стрелки на ребрах можно не рисовать ввиду того, что каждому преобразованию соответствует обратное.



Легко видеть, что построенный граф обладает симметричной структурой. Очевидно также, что наименьшее число переправ, которые необходимо сделать, равно 7. Опишем один из двух возможных способов переправы. Нужно сначала перевезти козу, вернуться обратно, забрать либо волка, либо капусту, затем взять с собой козу, вернуться обратно, взяв затем с собой оставшуюся капусту или волка, а потом вернуться за козой и переправить ее. Приведем пример аналогичной задачи, которая решается таким же способом.

Задача 6 *Три миссионера и три людоеда находятся на одном берегу реки, через которую им надо переправиться. Их лодка выдерживает только двух человек. Все миссионеры умеют грести, а среди людоедов на это способен только один. Сколько раз им придется пересечь реку, чтобы все они переправились на другой берег? При этом нельзя допускать, чтобы на каком-то из берегов число людоедов превысило число миссионеров (за исключением, разумеется, случая, когда там вообще нет миссионеров). Решить задачу при помощи графов.*

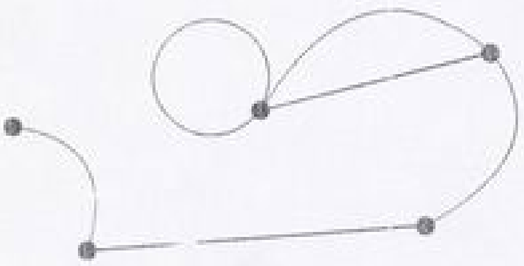
Задачи, решаемые при помощи графов, могут быть весьма разнообразны. Приведем еще один пример.

Задача 7 *В некоторой компании каждый человек знаком ровно с тремя другими. Всегда ли можно разбить членов компании на пары так, чтобы каждую пару составляли двое знакомых?*

Сейчас мы дадим строгое определение графа и некоторых сопутствующих понятий.

2 Понятие графа

Существует несколько определений графа, которые мы сейчас не будем подробно обсуждать. Мы дадим здесь определение графа, которое часто используется при алгебраическом подходе к предмету. Оно напоминает определения некоторых алгебраических систем. Достоинством этого определения является его универсальность. В то же время следует заметить, что оно не является характерным для большинства работ по теории графов. Такое определение было предложено Серром в [3]. Прежде чем перейти к самому определению, мы дадим сначала ключ к этому понятию, связав интуитивное представление о графе с формальным определением. Обычно графы задаются с помощью рисунка, и мы часто будем так делать. Поэтому рассмотрим граф, изображенный на следующем рисунке.



Данный граф имеет 5 выделенных точек (вершин) и 6 дуг (неориентированных ребер). Одно из наших основных соглашений состоит в том, что каждая из дуг будет рассматриваться как множество, состоящее из двух ориентированных ребер графа, взаимно обратных друг другу. На одной дуге можно двумя способами указать направление движения по ней. Дуга с указанным на ней направлением задает то, что мы называем ориентированным ребром графа. Таким образом, мы будем считать, что наш граф имеет 5 вершин и 12 (ориентированных) ребер. Далее, если не оговорено противное, мы будем понимать под ребром всегда именно ориентированное ребро. Однако сам граф, определенный таким образом, естественно называть неориентированным, так как ни на какой дуге мы не отдаем предпочтение никакому из направлений. Если мы такие предпочтения отдадим, то получим объект, который будет естественно назвать ориентированным графом.

Заметим, что для каждого ребра e имеется единственное обратное ему ребро, которое будет далее обозначаться e^{-1}. Понятно, что обратным для e^{-1} будет ребро e, поэтому $(e^{-1})^{-1} = e$. Далее, для каждого ребра e имеется единственная вершина, из которой это ребро исходит, и мы будем обозначать ее через $\alpha(e)$, называя ее *начальной вершиной* ребра e. Аналогично, у нас имеется единственная вершина $\omega(e)$, в которую ребро e входит. Такую вершину мы будем называть *конечной вершиной* ребра e. При этом допускается случай $\alpha(e) = \omega(e)$. Ребро e с таким свойством будет называться *петлей* графа. Заметим, что всегда $e \neq e^{-1}$, так как направление, выбранное на дуге, не может совпадать с противоположным. Очевидно также, что для любого ребра e имеют место равенства $\alpha(e^{-1}) = \omega(e)$, $\omega(e^{-1}) = \alpha(e)$. Множество всех вершин графа мы обозначим через V, а множество всех его (ориентированных) ребер — через E. Таким образом, у нас имеется функция ${}^{-1}: E \to E$ и две функции α, ω, отображающие E в V.

Обычно считают, что множества V и E не пересекаются. Мы находим это ограничение удобным в некоторых ситуациях, но, вообще говоря, излишним, поэтому в определении мы этого требовать не будем. Итак, мы пришли к следующему определению.

Определение 1 *Неориентированным графом* или *графом в смысле Серра* мы называем упорядоченный набор

$$\Gamma = \langle V, E, {}^{-1}, \alpha, \omega \rangle,$$

где V и E — некоторые множества, ${}^{-1}: E \to E$ есть отображение из E в себя, $\alpha: E \to V$ и $\omega: E \to V$ суть отображения из E в V. При этом требуется, чтобы выполнялись следующие условия (аксиомы графа):

1. отображение ${}^{-1}: E \to E$ является инволюцией без неподвижных точек, то есть для любого $e \in E$ выполнены условия $(e^{-1})^{-1} = e$ и $e \neq e^{-1}$;
2. для любого $e \in E$ выполняются условия $\alpha(e^{-1}) = \omega(e)$ и $\omega(e^{-1}) = \alpha(e)$.

Заметим, что во второй из аксиом графа достаточно оставить одно из двух условий. Скажем, если оставить только первое условие, то получим $\alpha(e) = \alpha((e^{-1})^{-1}) = \omega(e^{-1})$, то есть второе условие отсюда следует.

Еще раз подчеркнем, что мы определили именно неориентированный граф, который состоит, грубо говоря, из вершин и ориентированных ребер. Определим теперь неориентированное ребро графа.

Определение 2 *Неориентированным ребром* графа $\Gamma = \langle V, E, {}^{-1}, \alpha, \omega \rangle$ называется множество вида $\{ e, e^{-1} \}$, где $e \in E$.

Таким образом, каждое ориентированное ребро задает некоторое неориентированное ребро графа. При этом взаимно обратные ориентированные ребра задают одно и то же неориентированное ребро. Если граф имеет конечное число ребер, то число ориентированных ребер равно удвоенному числу неориентированных ребер. Теперь настала очередь определить понятие ориентированного графа.

Определение 3 Пусть дан граф $\Gamma = \langle V, E, {}^{-1}, \alpha, \omega \rangle$. *Ориентацией* на графе Γ называется такое подмножество E_+ множества E, которое содержит ровно по одному элементу из каждого множества вида $\{ e, e^{-1} \}$, где $e \in E$. Граф с заданной на нем ориентацией называется *ориентированным графом.*

Если на графе задана ориентация E_+, то можно задать множество $E_- = E \setminus E_+$. При этом $E_+ \cap E_- = \emptyset$, $E_+ \cup E_- = E$, причем для любого $e \in E$ условия $e \in E_+$ и $e^{-1} \in E_-$ равносильны друг другу. Сказанное дает возможность еще одного определения ориентации на графе, эквивалентного исходному. Если на графе задана ориентация, то ребра из E_+ называются *положительными*, а ребра из E_- — отрицательными.

Легко видеть, что на любом графе может быть задана некоторая ориентация. Если граф содержит ровно n неориентированных ребер, то число ориентированных ребер равно $2n$, а число возможных ориентаций на таком графе равно в точности 2^n.

3 Морфизм графов. Подграфы

Обычно вместе с математическими объектами, будь то группы, кольца, топологические пространства или графы, определяют отображения этих объектов друг в друга, сохраняющие основную структуру. Такие отображения принято называть морфизмами. Определим это понятие для графов.

Определение 4 Пусть $\Gamma_1 = \langle V_1, E_1, ^{-1}, \alpha, \omega \rangle$, $\Gamma_2 = \langle V_2, E_2, ^{-1}, \alpha, \omega \rangle$ — два графа. Пара отображений $\psi = (\psi_V, \psi_E)$, где $\psi_V: V_1 \to V_2$, $\psi_2: E_1 \to E_2$, называется *морфизмом графов*, если для любого $e \in E_1$ выполняются следующие условия:

1. $\psi_E(e^{-1}) = (\psi_E(e))^{-1}$,

2. $\psi_V(\alpha(e)) = \alpha(\psi_E(e))$, $\psi_V(\omega(e)) = \omega(\psi_E(e))$.

Строгости ради отметим, что на самом деле каждое из трех отображений $^{-1}$, α и ω действует в пределах своего графа, то есть правильнее было бы снабдить эти отображения нижними индексами подобно тому, как это было сделано с множествами V и E. Однако то упрощение записи, которое нами принято, не приводит к путанице.

Морфизм графов $\psi: \Gamma_1 \to \Gamma_2$ в обозначениях, использованных выше, называется инъективным (сюръективным, биективным), если каждое из отображений $\psi_V: V_1 \to V_2$, $\psi_E: E_1 \to E_2$ инъективно (сюръективно, биективно). Биективный морфизм графов $\psi: \Gamma_1 \to \Gamma_2$ называется *изоморфизмом графов*. Если существует некоторый изоморфизм графа Γ_1 на граф Γ_2, то говорят, что граф Γ_1 *изоморфен* графу Γ_2, и обозначают этот факт в виде $\Gamma_1 \cong \Gamma_2$.

Задача 8 *Доказать, что отношение изоморфизма графов является отношением эквивалентности.*

Данное упражнение позволяет говорить о графах, что они изоморфны. Как правило, теория графов изучает графы с точностью до изоморфизма. Это означает, что все интересные для изучения свойства графов сохраняются при изоморфизме.

Введем теперь понятие подграфа.

Определение 5 Пусть $\Gamma = \langle V, E, ^{-1}, \alpha, \omega \rangle$ — некоторый граф. Предположим, что имеются подмножества $V' \subseteq V$ и $E' \subseteq E$ такие, что для любого $e \in E'$ выполняются следующие условия: 1) $e^{-1} \in E'$, 2) $\alpha(e) \in V'$, 3) $\omega(e) \in V'$. Легко видеть, что при этом возникает граф $\Gamma' = \langle V', E', ^{-1}, \alpha, \omega \rangle$. Он называется ***подграфом*** графа Γ.

Как и выше, символ $^{-1}$ для графа Γ' обозначает отображение из E' в E', а символы α и ω — отображения из E' в V'.

Пусть имеется инъективный морфизм $\psi = (\psi_V, \psi_E)$ графа Γ_1 в граф Γ_2. Легко видеть, что образ графа Γ_1 при этом морфизме, то есть граф $\langle \psi_V(V_1), \psi_E(E_1), ^{-1}, \alpha, \omega \rangle$ будет подграфом в Γ_2. Поэтому часто говорят, что граф Γ_1 является подграфом в Γ_2, имея в виду, что существует инъективный морфизм графа Γ_1 в Γ_2.

Завершим данный параграф определением дизъюнктного объединения графов. Пусть I — некоторое множеств индексов, и пусть для каждого $i \in I$ задан некоторый граф Γ_i с множеством вершин V_i и множеством ребер E_i. Предположим, что графы семейства $\{\Gamma_i\}_{i \in I}$ попарно дизъюнктны, то есть для любых $i, j \in I$ выполняются условия $V_i \cap V_j = \emptyset$, $E_i \cap E_j = \emptyset$ при $i \neq j$. Положим $V = \bigcup_{i \in I} V_i$, $E = \bigcup_{i \in I} E_i$. На множестве E естественным образом определена функция $^{-1}$ взятия обратного ребра. А именно, для любого $e \in E$ существует единственный элемент $i \in I$ такой, что $e \in E_i$. В качестве e^{-1} возьмем ребро, обратное e в графе Γ_i. Аналогично определяются функции α и ω из E в V при помощи соответствующих функций из E_i в V_i. В результате получается упорядоченный набор $\Gamma = \langle V, E, ^{-1}, \alpha, \omega \rangle$, который, как легко видеть, является графом. Этот граф называется *дизъюнктным объединением* семейства графов $\{\Gamma_i\}_{i \in I}$. Из определений следует, что для каждого $i \in I$ граф Γ_i является подграфом в Γ.

4 Пути в графе

Понятие пути в графе относится к числу самых важных, поскольку оно очень часто используется. Мы сейчас дадим строго формальное определение, а затем покажем, как получить более удобную форму записи путей.

Определение 6 *Путем* в графе $\Gamma = \langle V, E, ^{-1}, \alpha, \omega \rangle$ называется конечная последовательность вида $(v_0, e_1, \ldots, e_n, v_n)$, где n — целое неотрицательное число, $v_0, \ldots, v_n \in V$, $e_1, \ldots, e_n \in E$, причем для каждого i от 1 до n справедливы равенства $\alpha(e_i) = v_{i-1}$, $\omega(e_i) = v_i$.

Если задан путь $p = (v_0, e_1, \ldots, e_n, v_n)$, то число n называется его *длиной* и обозначается $|p|$. Вершина v_0 называется *начальной вершиной* пути p, а вершина v_n — его *конечной вершиной*. Начальная и конечная вершина пути p обозначаются через $\alpha(p)$ и $\omega(p)$ соответственно. (Задавая путь в таком виде, мы последовательно указываем все проходимые этим путем вершины и ребра.)

Если длина пути равна нулю, то он называется *пустым*. При этом путь имеет вид (v) для некоторой вершины v, поэтому по сути он представляет собой вершину. Мы будем обозначать такой путь через 1_v и называть его (пустым) путем, состоящим из вершины v.

Пусть имеется некоторый путь $p = (v_0, e_1, \ldots, e_n, v_n)$. Рассмотрим новую последовательность $(v_n, e_n^{-1}, \ldots, e_1^{-1}, v_0)$. Из аксиом графа следует, что для любого i от 1 до n имеют место равенства $\alpha(e_i^{-1}) = \omega(e_i) = v_i$, $\omega(e_i^{-1}) = \alpha(e_i) = v_{i-1}$. Рассмотренная последовательность обозначается через p^{-1} и называется путем, *обратным* p. Из определений следует, что $\alpha(p^{-1}) = \omega(p)$, $\omega(p^{-1}) = \alpha(p)$ для любого пути p. Ясно также, что пустой путь обратен себе самому.

Теперь определим понятие произведения путей. Пусть имеются пути p и q в графе Γ. Предположим, что конец первого из них совпадает с началом второго, т.е. $\omega(p) = \alpha(q)$. (В противном случае произведение путей p и q не определено.) Введем обозначения $p = (v_0, e_1, \ldots, e_n, v_n)$, $q = (w_0, f_1, \ldots, f_m, w_m)$, где $m, n \geq 0$, $v_0, \ldots, v_n, w_0, \ldots, w_m \in V$, $e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_m \in E$. По условию, $v_n = w_0$. Рассмотрим последовательность

$$(v_0, e_1, \ldots, e_n, u, f_1, \ldots, f_m, w_m),$$

где $u = v_n = w_0$.

Из определений легко следует, что рассмотренная последовательность является путем. Он обозначается $p \cdot q$ и называется *произведением* путей p и q. Подчеркнем, что это произведение определено в том и только в том случае, когда $\omega(p) = \alpha(q)$. Если произведение путей p и q определено, то справедливы равенства $\alpha(p \cdot q) = \alpha(p)$, $\omega(p \cdot q) = \omega(q)$. В этом случае, как легко видеть, определено произведение путей q^{-1} и p^{-1}, и при этом $q^{-1} \cdot p^{-1} = (p \cdot q)^{-1}$. (В дальнейшем точка, используемая как знак произведения, будет часто опускаться.) Заметим также, что в нашей ситуации $|pq| = |p| + |q|$.

Нетрудно проверить, что произведение путей обладает свойством ассоциативности, то есть для любых трех путей p, q, r таких, что $\omega(p) = \alpha(q)$, $\omega(q) = \alpha(r)$, выполняется равенство $(pq)r = p(qr)$. (Оба произведения определены, поскольку $\omega(pq) = \omega(q) = \alpha(r)$ и аналогично $\omega(p) = \alpha(q) = \alpha(qr)$.) Из закона ассоциативности следует, что произведение путей не зависит от расстановки скобок, что позволяет писать без скобок произведения трех, четырех и более путей.

Заметим также, что если $\alpha(p) = u$, $\omega(p) = v$ для пути p, то $1_u \cdot p = p = p \cdot 1_v$.

Всякий путь длины 1 имеет вид (u, e, v), где u — начало, а v — конец ребра e. Это значит, что такой путь задается просто указанием ребра. Можно поэтому отождествить путь $(\alpha(e), e, \omega(e))$ с ребром e. (Легко видеть, что значения функций $^{-1}$, α и ω на ребре e будут при этом совпадать со значениями этих же функций на пути, состоящем из ребра e.) С учетом сказанного, любой непустой путь $p = (v_0, e_1, \ldots, e_n, v_n)$ будет произведением входящих в его запись ребер, то есть $p = e_1 \ldots e_n$. Это и есть стандартная запись пути, удобная в использовании. После того как такая запись обоснована, необходимость в использовании записи пути как последовательности вершин и ребер практически исчезает. Отметим также, что представление непустого пути в виде произведения ребер единственно.

5 Связные графы. Компоненты связности графа

С помощью понятия пути можно дать много различных определений, в том числе можно определить понятие связного графа. Пусть имеется произвольный граф $\Gamma = \langle V, E, ^{-1}, \alpha, \omega \rangle$. Зададим бинарное отношение $\sim$ на множестве его вершин. Если $u, v \in V$, то полагаем $u \sim v$, если существует некоторый путь p в графе Γ из вершины u в вершину v, то есть $\alpha(p) = u$, $\omega(p) = v$.

Задача 9 Проверить, что заданное таким образом отношение $\sim$ на множестве V является отношением эквивалентности на множестве вершин графа.

Если любые две вершины графа можно соединить путем в этом графе, то такой граф мы будем называть *связным*. Это равносильно тому, что все вершины графа эквивалентны друг другу, то есть имеется ровно один класс эквивалентности V.

Обозначим через I множество классов эквивалентности. Нам удобно считать I просто множеством индексов, обозначая класс эквивалентности вершин через V_i для $i \in I$. Очевидно, что для любого ребра $e \in E$ его начальная и конечная вершина эквивалентны, то есть $\alpha(e) \sim \omega(e)$. Таким образом, для каждого ребра имеется в точности один класс эквивалентности, которому принадлежат его начало и конец. Это позволяет ввести множества $E_i = \{ e \in E \mid \alpha(e), \omega(e) \in V_i \}$ для любого $i \in I$. Ясно, что любое ребро e принадлежит в точности одному из множеств вида E_i. Тем самым для каждого $i \in I$ возникает граф $\Gamma_i = \langle V_i, E_i, ^{-1}, \alpha, \omega \rangle$, являющийся подграфом в Γ. Нетрудно заметить, что граф Γ будет изоморфен дизъюнктному объединению семейства графов $\{ \Gamma_i \}_{i \in I}$. Определенные нами подграфы Γ_i будут, очевидно, связными. Они называются *связными компонентами* графа Γ. Легко также понять, что если Γ есть дизъюнктное объединение семейства связных графов $\{ \Gamma_i \}_{i \in I}$, то Γ будет иметь эти графы в качестве своих связных компонент. Граф связен тогда и только тогда, когда он имеет в точности одну связную компоненту.

Предложим в заключение два упражнения, касающиеся связных графов.

Задача 10 Доказать, что граф связен тогда и только тогда, когда для любого разбиения множества его вершин на два непустых подмножества V_1 и V_2 найдется ребро графа, соединяющее некоторую вершину из V_1 с некоторой вершиной из V_2.

Задача 11 Назовем цепью простой (незамкнутый) путь в графе, не проходящий дважды через одну и ту же вершину. Доказать, что в связном конечном графе любые две наидлиннейшие цепи имеют общую вершину.

6 Простые графы. Матрицы смежности и инцидентности

Во многих случаях оказывается, что достаточно рассматривать графы, в которых нет *петель* (никакое ребро не соединяет вершину с ней самой) и нет *кратных ребер* (то есть не существует таких различных ребер e и f, что $\alpha(e) = \alpha(f)$, $\omega(e) = \omega(f)$). Заметим, что формально из отсутствия кратных ребер следует и отсутствие петель, так как если имеется ребро с началом и концом v, то есть и второе ребро e^{-1} с тем же началом и концом. Граф без петель и кратных ребер называется *простым*. Такие графы возникают, например, в задачах о знакомствах. Часто при рассмотрении простых графов достаточно ограничиться случаем конечных графов. В общем случае граф называется *конечным*, если конечно как множество его вершин, так и множество ребер. Если простой граф имеет n вершин, то нетрудно заметить, что максимальное количество ориентированных ребер в нем равно $n(n-1)$, так как ориентированное ребро может соединять любую из n вершин с любой из оставшихся $n-1$ вершин. По этой причине количество неориентированных ребер (дуг) может принимать любое значение от 0 до $n(n-1)/2$.

В случае простых графов под неориентированным ребром можно понимать просто двухэлементное подмножество множества вершин. Соответственно, ориентированным ребром с содержательной точки зрения будет упорядоченная пара различных вершин графа.

Задача 12 Показать, что с точностью до изоморфизма количество простых графов с одной вершиной равно 1, с двумя вершинами — двум, с тремя вершинами — четырем. Сколько имеется с точностью до изоморфизма простых графов с четырьмя вершинами?

При перечислении простых графов с точностью до изоморфизма полезно учитывать следующее соображение. Пусть имеется простой граф с n вершинами, имеющий m неориентированных ребер (дуг). Ему можно поставить в соответствие другой граф (дополнение), в котором две вершины соединены тогда и только тогда, когда они не соединены в исходном графе. В новом графе будет $n(n-1)/2 - m$ дуг. Поэтому простых графов с n вершинами и m дугами будет (с точностью до изоморфизма) ровно столько, сколько их имеется с тем же числом вершин и $n(n-1)/2 - m$ дугами.

Рассмотрим два способа задания простых графов. Пусть имеется простой граф Γ, имеющий n вершин и m дуг. Если дуга имеет вершину в качестве одного из концов, то будем говорить, что данная вершина и дуга *инцидентны* друг другу. Занумеруем вершины произвольным образом натуральными числами от 1 до n, а дуги — от 1 до m. Сопоставим графу матрицу A размером $m \times n$ следующим образом. На пересечении i-ой строки и j-го столбца матрицы A поместим единицу, если i-ая дуга и j-ая вершина инцидентны друг другу. В противном случае на данном место расположим нуль. В результате получится матрица из нулей и единиц. Она

6 Простые графы. Матрицы смежности и инцидентности

Во многих случаях оказывается, что достаточно рассматривать графы, в которых нет *петель* (никакое ребро не соединяет вершину с ней самой) и нет *кратных ребер* (то есть не существует таких различных ребер e и f, что $\alpha(e) = \alpha(f)$, $\omega(e) = \omega(f)$). Заметим, что формально из отсутствия кратных ребер следует и отсутствие петель, так как если имеется ребро с началом и концом v, то есть и второе ребро e^{-1} с тем же началом и концом. Граф без петель и кратных ребер называется *простым*. Такие графы возникают, например, в задачах о знакомствах. Часто при рассмотрении простых графов достаточно ограничиться случаем конечных графов. В общем случае граф называется *конечным*, если конечно как множество его вершин, так и множество ребер. Если простой граф имеет n вершин, то нетрудно заметить, что максимальное количество ориентированных ребер в нем равно $n(n-1)$, так как ориентированное ребро может соединять любую из n вершин с любой из оставшихся $n-1$ вершин. По этой причине количество неориентированных ребер (дуг) может принимать любое значение от 0 до $n(n-1)/2$.

В случае простых графов под неориентированным ребром можно понимать просто двухэлементное подмножество множества вершин. Соответственно, ориентированным ребром с содержательной точки зрения будет упорядоченная пара различных вершин графа.

Задача 12 Показать, что с точностью до изоморфизма количество простых графов с одной вершиной равно 1, с двумя вершинами — двум, с тремя вершинами — четырем. Сколько имеется с точностью до изоморфизма простых графов с четырьмя вершинами?

При перечислении простых графов с точностью до изоморфизма полезно учитывать следующее соображение. Пусть имеется простой граф с n вершинами, имеющий m неориентированных ребер (дуг). Ему можно поставить в соответствие другой граф (дополнение), в котором две вершины соединены тогда и только тогда, когда они не соединены в исходном графе. В новом графе будет $n(n-1)/2 - m$ дуг. Поэтому простых графов с n вершинами и m дугами будет (с точностью до изоморфизма) ровно столько, сколько их имеется с тем же числом вершин и $n(n-1)/2 - m$ дугами.

Рассмотрим два способа задания простых графов. Пусть имеется простой граф Γ, имеющий n вершин и m дуг. Если дуга имеет вершину в качестве одного из концов, то будем говорить, что данная вершина и дуга *инцидентны* друг другу. Занумеруем вершины произвольным образом натуральными числами от 1 до n, а дуги — от 1 до m. Сопоставим графу матрицу A размером $m \times n$ следующим образом. На пересечении i-ой строки и j-го столбца матрицы A поместим единицу, если i-ая дуга и j-ая вершина инцидентны друг другу. В противном случае на данном место расположим нуль. В результате получится матрица из нулей и единиц. Она называется *матрицей инцидентности* простого конечного графа. Нетрудно понять, что граф определяется этой матрицей однозначно (с точностью до изоморфизма), причем два простых графа изоморфны тогда и только тогда, когда их матрицы инцидентности можно получить друг из друга, меняя порядок строк или столбцов.

Нам будет далее нужно одно определение, относящееся к произвольным графам в смысле Серра.

Определение 7 Пусть $\Gamma = \langle V, E, ^{-1}, \alpha, \omega \rangle$ — произвольный граф. Количество ориентированных ребер, имеющих v своим началом, то есть число элементов множества $\{ e \in E \mid \alpha(e) = v \}$, называется *валентностью* вершины $v \in V$.

Валентность вершины V мы будем обозначать через $\rho(v)$. Заметим, что имеется также в точности ровно $\rho(v)$ ориентированных ребер, имеющих v в качестве конечной вершины. В примере, изобр кенном на рисунке в разделе "Понятие графа", валентности вершин графа равны 1, 2, 2, 3, 4 (следует заметить, что добавление ребра, являющегося петлей с началом и концом в вершине v, добавляет 2 к валентности этой вершины).

Вернемся к матрице инцидентности графа. Понятно, что в каждой строке имеется ровно две единицы. Поэтому сумма элементов строки равна 2. Сумма элементов столбца равна валентности вершины, соответствующей этому столбцу. Нетрудно заметить, что необходимое и достаточное условие того, чтобы матрица из нулей и единиц была матрицей инцидентности некоторого простого графа, состоит в следующем: а) сумма элементов любой строки равна 2, б) в матрице нет одинаковых строк.

Сумма всех элементов матрицы инцидентности, с одной стороны, есть сумма валентностей всех вершин графа, а с другой стороны она равна удвоенному числу строк, то есть удвоенному числу дуг. Последнее число есть также число ориентированных ребер графа. Этот несложный факт имеет место для любого конечного графа, не обязательно простого.

Теорема 1 *В любом конечном графе сумма валентностей вершин равна числу ориентированных ребер. В частности, эта сумма всегда четна.*

Для доказательства достаточно заметить, что всякое (ориентированное) ребро начинается в точности в одной вершине. Поэтому общее число ребер получится, если просуммировать по всем вершинам числа, равные количеству выходящих из каждой вершины ребер, а это и есть сумма валентностей. Из теоремы 1 следует, что в любом конечном графе с нечетным числом вершин имеется хотя бы одна вершина четной валентности. Это следствие (для простых графов) можно сформулировать в занимательной форме. Пусть в некоторой компании с нечетным числом участников были произведены некоторые рукопожатия. При этом всегда должен найтись некто, совершивший четное число рукопожатий (например, не совершивший ни одного). Поэтому данное следствие, а иногда и саму теорему 1, часто называют "леммой о рукопожатиях".

длины k из i-й вершины в s-ую равно x_{is}. Число (ориентированных) ребер, начинающихся в s-й вершине и оканчивающихся в j-й, равно b_{sj} по определению матрицы смежности. Следовательно, $x_{is}b_{sj}$ есть число путей вида pe, где p есть путь длины k из i-й вершины в s-ю, а e — ребро с началом в s-й и концом в j-й вершине. Суммируя по s от 1 до n, получаем общее число путей длины $k+1$ из i-й вершины в j-ю. Это число равно $x_{i1}b_{1j} + \ldots + x_{in}b_{nj}$. По определению произведения матриц, это есть элемент матрицы $B^k B = B^{k+1}$, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца. Поэтому наше число равно y_{ij}, то есть утверждение справедливо для значения $k+1$.

Теорема доказана.

7 Примеры графов

В данном небольшом разделе мы рассмотрим стандартные обозначения для ряда графов, используемых в дальнейшем.

Для каждого $n \geq 1$ рассмотрим простой граф с n вершинами, в котором любые две вершины соединены ребром. Общее число неориентированных ребер (дуг) будет равно $n(n-1)/2$. Такой граф будет называться *полным графом* с n вершинами. Он обозначается K_n. Любой простой конечный граф с n вершинами будет являться подграфом графа K_n.

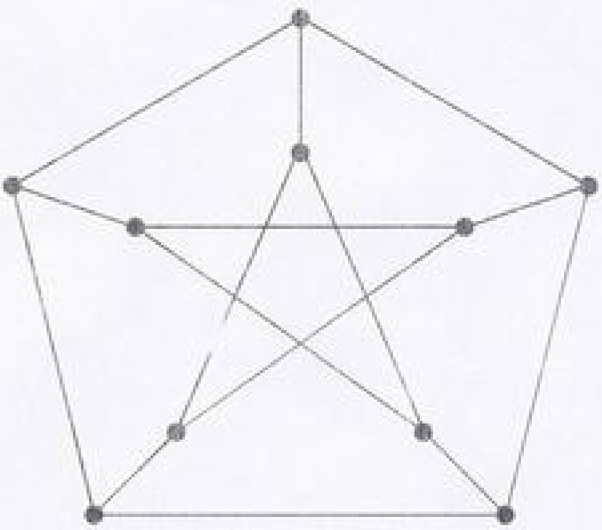
Пусть V' и V'' — непустые множества из m и n элементов соответственно. Положим $V = V' \cup V''$. Соединим дугой каждую вершину из V' с каждой вершиной из V''. Получим граф, в котором $m+n$ вершин и mn неориентированных ребер. Он обозначается $K_{m,n}$ и называется *полным двудольным графом* типа (m,n). Произвольный простой граф Γ мы называем *двудольным*, если множество его вершин можно разбить на два непустых подмножества V' и V'', которые имеют пустое пересечение, и при этом любая дуга соединяет некоторую вершину из V' с некоторой вершиной из V''. Иными словами, в этом графе нет дуг, соединяющих между собой вершины из V', а также нет дуг, соединяющих вершины из V''. (Заметим, что в двудольном графе может не быть ребер вообще.) Любой конечный двудольный граф будет подграфом в $K_{m,n}$ для некоторых m, n. Можно также сказать, что двудольным будет граф, вершины которого можно раскрасить в два цвета так, что всякая дуга соединяет вершины, раскрашенные в разные цвета. (При этом имеется хотя бы одна вершина каждого из цветов.)

Рассмотрим произвольный правильный n-угольник ($n \geq 3$). Ему можно естественным образом сопоставить граф, вершины которого — это вершины n-угольника, а неориентированные ребра — это его стороны. Такой граф имеет n вершин и $2n$ ориентированных ребер. Формально его можно задать так. Пусть $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $E = \{e_1, \ldots, e_n, e_1^{-1}, \ldots, e_n^{-1}\}$. Определим функции ${}^{-1}\colon E \to E$, $\alpha\colon E \to V$, $\omega\colon E \to V$, полагая $(e_i^{-1})^{-1} = e_i$, $\alpha(e_i) = v_i$, $\omega(e_i) = v_{i+1}$, где $v_{n+1} = v_1$ по определению. Соответственно, $\alpha(e_i^{-1}) = v_{i+1}$, $\omega(e_i^{-1}) = v_i$. При этом мы получаем граф, обозначаемый C_n и называемый *циклическим графом* порядка n. Он определен при любом натуральном $n \geq 1$. Графы C_1, C_2, C_3, C_4 изображены на следующем рисунке:

C_1 C_2 C_3 C_4

С античных времен известно 5 правильных многогранников (платоновых тел): тетраэдр, куб (гексаэдр), октаэдр, додекаэдр, икосаэдр. Число их вершин соответственно равно 4, 8, 6, 20, 12. Для числа ребер этих многогранников соответственно имеем 6, 12, 12, 30, 30. (Число граней составляет соответственно 4, 6, 8, 12, 20, что соответствует их названиям.) Каждый из этих многогранников задает граф, вершины которого суть вершины многогранника, а неориентированные ребра (дуги) суть ребра многогранника в обычном смысле этого слова. Вообще говоря, любой многогранник, не обязательно правильный, задает граф аналогичным образом. В этом случае мы говорим о *графе данного многогранника*.

Вот еще один граф, который нам будет нужен в дальнейшем. Он называется *графом Петерсена* и изображен на рисунке ниже:



8 Циклы в графах

Пусть имеется произвольный граф $\Gamma = \langle V, E, ^{-1}, \alpha, \omega \rangle$. Мы будем рассматривать пути в нем и некоторые их свойства. Путь p называется *замкнутым*, если его начальная вершина совпадает с конечной, то есть $\alpha(p) = \omega(p)$. Путь p называется *приведенным*, если он не может быть представлен в виде $p_1 e e^{-1} p_2$, где $e \in E$ —

ребро, p_1, p_2 — пути. Иными словами, путь приведен, если в нем нет подряд проходимых взаимно обратных ребер. Допустим, что путь p не приведен. Представляя его в виде $p = p_1 e e^{-1} p_2$, заметим, что $\omega(p_1) = \alpha(e) = \omega(e^{-1}) = \alpha(p_2)$, откуда следует, что произведение путей $p_1 p_2$ определено. Очевидно, что путь $p' = p_1 p_2$ содержит на два ребра меньше, чем p. При этом не изменилась ни начальная вершина пути p, ни конечная вершина, то есть у p' они те же, что и у p. Переход от p к p' мы назовем элементарным приведением (редукцией) пути p. Путь p' в свою очередь может быть не приведен. Тогда применим к p' какую-либо элементарную редукцию и так далее. Этот процесс должен окончиться, так как длина все время уменьшается. В итоге мы получим приведенный путь из $u = \alpha(p)$ в $v = \omega(p)$.

Пусть в графе Γ имеются две вершины u, v из одной и той же связной компоненты. Тогда их можно соединить в Γ путем. Предыдущее рассуждение показывает, что в этом случае их можно соединить приведенным путем. Среди всех путей в графе, соединяющих вершины u и v (если таковые вообще имеются), существуют пути кратчайшей длины. Такие пути мы будем называть *геодезическими*. Ввиду важности этого понятия повторим его определение еще раз. Путь p в графе Γ называется геодезическим, если не существует такого пути q в этом же графе, что $\alpha(p) = \alpha(q)$, $\omega(p) = \omega(q)$, но $|q| < |p|$. Легко видеть, что всякий геодезический путь неизбежно приведен. Ясно также, что в геодезическом пути проходимые вершины не могут повторяться.

Введем также понятие циклически приведенного пути. Пусть имеется замкнутый путь p. Он называется *циклически приведенным*, если он приведен, и при этом p нельзя представить в виде $p = eqe^{-1}$, где q — путь, e — ребро. Можно дать эквивалентное определение. Допустим, что замкнутый путь p представлен в виде произведения: $p = p_1 p_2$. Ясно, что произведение $p_2 p_1$ также определено и является замкнутым путем. Такой путь мы будем называть *циклическим сдвигом* пути p. Путь p будет циклически приведенным тогда и только тогда, когда все его циклические сдвиги приведены. Рекомендуем читателю самостоятельно убедиться в эквивалентности двух определений.

Замкнутый путь в графе мы для краткости также называем *циклом*. Всякий пустой путь является циклом. Также циклом будет любой путь вида ee^{-1}, где e — произвольное ребро графа. Чтобы исключить тривиальные случаи, будем рассматривать только непустые приведенные циклы в графе. Допустим, что граф Γ содержит хотя бы один такой цикл. Среди всех непустых приведенных циклов в Γ пусть p будет циклом минимальной длины. Легко видеть, что p циклически приведен. В противном случае $p = eqe^{-1}$ для некоторого пути q и ребра e. Понятно, что q — замкнутый путь с началом и концом в $\omega(e)$. Ясно также, что q непуст, так как p приведен. Разумеется, q также приведен как подпуть приведенного пути. Таким образом, мы получаем противоречие с минимальностью пути p.

Изучим свойства пути p более подробно. Представим его в виде последовательности $p = (v_0, e_1, \ldots, e_n, v_n)$ в соответствии с определением. По условию, $n \geq 1$ и $v_0 = v_n$. Прежде всего заметим, что все вершины $v_1, \ldots, v_n$ попарно различны. Если, например, $v_i = v_j$ при $1 \leq i < j \leq n$, то вместо пути p можно было бы взять более короткий цикл $(v_i, e_{i+1}, \ldots, e_j, v_j)$, который приведен и непуст.

Далее, проверим, что в списке ребер $e_1, \ldots, e_n, e_1^{-1}, \ldots, e_n^{-1}$ нет повторений. Допустим сначала, что $e_i = e_j$ при $i \neq j$. Тогда $v_i = \omega(e_i) = \omega(e_j) = v_j$, а это ввиду $i, j \geq 1$ противоречит доказанному выше. Таким образом, $e_i \neq e_j$ при $i \neq j$, и по той же причине $e_i^{-1} \neq e_j^{-1}$. Осталось рассмотреть случай $e_i = e_j^{-1}$. Имеем $v_i = \omega(e_i) = \omega(e_j^{-1}) = \alpha(e_j) = v_{j-1}$. Это означает, что либо $i = j-1$, либо $j-1 = 0$, но тогда $v_i = v_0 = v_n$, откуда $i = n$. В первом случае $e_{j-1} = e_i = e_j^{-1}$, что противоречит приведенности пути p. Во втором случае $i = n$, $j = 1$, то есть $e_n = e_1^{-1}$. Поскольку ребро не совпадает с обратным, отсюда следует, что $n > 1$. Но тогда p имеет вид $e_1 q e_1^{-1}$, то есть он не циклически приведен. Чтобы подытожить наши рассуждения, введем одно определение и сформулируем лемму.

Определение 8 Непустой замкнутый путь p в графе называется *простым циклом*, если он имеет вид $p = (v_0, e_1, v_1, \ldots, v_n, e_n)$, где все вершины $v_1, \ldots, v_n$ попарно различны, и все ребра $e_1, \ldots, e_n, e_1^{-1}, \ldots, e_n^{-1}$ попарно различны.

Чтобы сделать это определение более наглядным, сравним его с определением циклического графа C_n. Легко видеть, что если в графе имеется простой цикл длины n, то в нем есть подграф, изоморфный C_n и обратно. Рассуждения, предшествующие определению, доказывают такой факт.

Лемма 1 *Если в графе имеется непустой приведенный цикл, то имеется и простой цикл, то есть имеется подграф, изоморфный циклическому графу C_n для некоторого n.*

9 Деревья

Введем основное понятие данного раздела.

Определение 9 Связный граф, не имеющий непустых приведенных циклов, называется *деревом*.

Если граф не имеет непустых приведенных циклов, то для краткости его часто называют просто *графом без циклов*. Ясно, что связные компоненты графа без циклов являются деревьями. Поэтому граф без циклов — это дизъюнктное объединение деревьев. Такой граф называется *лесом*.

Для удобства дальнейшей работы с деревьями полезно проделать следующее несложное упражнение.

Задача 14 Перечислить с точностью до изоморфизма все деревья с 6 вершинами.

Вершину графа назовем *изолированной*, если она имеет валентность 0 и назовем ее *висячей*, если она имеет валентность 1. Докажем следующее утвеждение.

Теорема 3 *Всякое конечное дерево, состоящее более чем из одной вершины, имеет висячую вершину.*

Доказательство. Пусть T — дерево, состоящее более чем из одной вершины. Ввиду связности дерева, в нем нет изолированных вершин. Предположим, что висячих вершин в T не имеется. Тогда для любой вершины v имеет место неравенство $\rho(v) \geq 2$. Определим по индукции бесконечную последовательность вершин и ребер $v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n, \ldots$, где для любого $n \geq 1$ началом ребра e_n служит вершина v_{n-1}, а концом — вершина v_n. В качестве v_0 берем любую из вершин, а в качестве e_1 — любое ребро, исходящее из v_0 (оно, конечно, существует). Допустим, что мы уже определили начальный отрезок последовательности $v_0, e_1, \ldots, v_{n-1}, e_n$. По определению положим $v_n = \omega(e_n$ Поскольку валентность вершины v_n не меньше двух, то имеется по крайней мере два ребра, исходящих из v_n. Одно из них — это e_n^{-1}. У нас имеется по крайней мере еще одно, поэтому в качестве e_{n+1} возьмем любое ребро с началом в вершине v_n, отличное от e_n^{-1}.

Итак, мы получили бесконечную последовательность. Поскольку граф конечен, в этой последовательности найдутся повторяющиеся вершины. Поэтому можно найти такие i, j, что $i < j$, но $v_i = v_j$. Тогда можно рассмотреть последовательность $p = (v_i, e_{i+1}, \ldots, e_j, v_j)$. Ясно, что это путь, причем замкнутый. Он непуст, так как содержит $j - i > 0$ ребер. Он также приведен, поскольку соседние ребра e_n, e_{n+1} по определению не являются взаимно обратными. Мы пришли к противоречию с тем, что T является деревом.

Теорема доказана.

Заметим, что для бесконечных деревьев утверждение теоремы не справедливо.

Рассмотрим следующую весьма общую ситуацию. Пусть $\Gamma = \langle V, E, ^{-1}, \alpha, \omega \rangle$ — граф, $e \in E$ — его ориентированное ребро. Рассмотрим операцию удаления ребра из графа. Положим $E' = E \setminus \{ e, e^{-1} \}$. Ясно, что у нас имеется отображение $^{-1}\colon E' \to E'$, поскольку мы удалили ребро вместе с обратным ему. Также у нас есть отображения α, ω из E' в V. Поэтому набор $\langle V, E', ^{-1}, \alpha, \omega \rangle$, как нетрудно проверить, будет графом (это подграф в Γ). Мы называем его графом, полученным из Γ удалением ребра e и обозначаем через $\Gamma - e$.

Заметим, что таким же образом нельзя удалить из графа вершину, за исключением случая, когда она является изолированной.

Определение 10 Ребро e связного графа Γ называется *мостом*, если граф $\Gamma - e$ не связен. Если граф не связен, то ребро называется его мостом в случае, когда оно является мостом соответствующей связной компоненты.

Допустим, у нас есть связный граф Γ с мостом e. Установим такой факт: граф $\Gamma - e$ имеет ровно две связные компоненты, причем начало и конец ребра e принадлежат разным компонентам связности. Положим $u = \alpha(e)$, $v = \omega(e)$. Пусть w — произвольная вершина графа Γ. Покажем вначале, что ее можно соединить путем в $\Gamma - e$ либо с u, либо с v.

Поскольку граф Г связен, в нем вершину w можно соединить путем как с u, так и с v. В качестве p возьмем кратчайший путь в Г такой, что $\alpha(p) = w$, $\omega(p) \in \{u, v\}$. Достаточно убедиться в том, что p — это путь в $\Gamma - e$. Если это не так, то p содержит либо ребро e, либо ребро e^{-1}. Представим путь p в виде $p = p_1 e^{\pm 1} p_2$. Понятно, что концом p_1 будет u или v, поэтому путь p можно заменить на более короткий путь p_1.

Итак, p лежит в $\Gamma - e$. Отсюда следует, что любую вершину графа Г можно соединить с u или v в подграфе $\Gamma - e$. Поэтому $\Gamma - e$ имеет не более двух компонент связности. Поскольку e — это мост, мы получаем, что компонент связности ровно две. Отсюда также ясно, что u и v лежат в разных компонентах связности графа $\Gamma - e$ (в противном случае он связен).

Доказанное выше свойство мостов мы будем использовать в дальнейшем. Для начала мы из теоремы 3 извлечем важное следствие о связи числа вершин и ребер дерева.

Теорема 4 *В любом дереве число неориентированных ребер на единицу меньше числа вершин.*

Доказательство. Доказательство проводится индукцией по числу вершин. Если в дереве всего одна вершина, то ребер нет, то есть наше утверждение верно. Пусть дерево T имеет $n > 1$ вершин. Предположим, что наше утверждение справедливо для всех деревьев с менее чем n вершинами. Ввиду теоремы 3 в дереве T имеется висячая вершина v. Обозначим через e единственное ориентированное ребро, исходящее из v. Удаляя ребро e вместе с обратным ему, а затем удаляя оставшуюся изолированной вершину v, мы получим дерево T' с $n-1$ вершиной. По предположению индукции, число ребер в T' на единицу меньше числа вершин. Поскольку в T имеется ровно на одну вершину и ровно на одно неориентированное ребро больше, чем в T', то утверждение справедливо также и для T.

Теорема доказана.

Сейчас мы рассмотрим несколько свойств графов, равносильных свойству графа быть деревом.

Теорема 5 *Пусть Г — конечный связный граф. Тогда следующие условия равносильны.*

1) *Г является деревом.*

2) *Для любых двух вершин графа существует единственный приведенный путь из одной вершины в другую.*

3) *Любое ребро графа является мостом.*

4) *В Г не имеется простых циклов.*

Доказательство. Докажем импликации 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 4) $\Rightarrow$ 1).

1) $\Rightarrow$ 2) Пусть Г — дерево. Рассмотрим две произвольные его вершины u, v. Поскольку Г связен, вершины u, v можно соединить путем. Любой геодезический путь из u в v будет приведенным, как говорилось выше. Осталось доказать единственность приведенного пути из u в v.

Рассуждаем от противного. Пусть p, q — два различных приведенных пути с началом u и концом в v. Рассмотрим все такие пути r, что для некоторых путей p_1, q_1 выполняются равенства $p = p_1r$, $q = p_2r$. Хотя бы один путь r, для которого это справедливо, всегда имеется, например, пустой. Поэтому существует путь r максимальной длины, для которого это условие выполнено. Мы утверждаем, что путь $p_1q_1^{-1}$ приведен. В самом деле, допустим, что это не так, то есть в нем имеется подпуть вида ee^{-1}, где e — ребро. Тогда, ввиду приведенности путей p_1 и q_1^{-1}, ребро e должно быть последним ребром пути p_1, а e^{-1} — первым ребром q_1^{-1}. Тогда e есть также последнее ребро пути q_1, и можно положить $p_1 = p_2e$, $q_1 = q_2e$. При этом выполняются равенства $p = p_2(er)$, $q = q_2(er)$, откуда вытекает возможность удлинить путь r на одно ребро.

Итак, путь $p_1q_1^{-1}$ приведен. Он замкнут, так как началом и концом его является u. Он также непуст, так как в противном случае оба пути p_1, q_1 пусты, но при этом p и q совпадают. Итак, мы получили непустой приведенный цикл в Γ, что противоречит тому, что это дерево. Тем самым единственность доказана.

2) $\Rightarrow$ 3) Пусть выполнено условие единственности геодезического пути. Проверим, что любое ребро e графа Γ является его мостом. Рассмотрим граф $\Gamma - e$. Допустим, что он связен. Тогда в нем вершины $u = \alpha(e)$, $v = \omega(e)$ можно соединить путем. Кратчайший из таких путей приведен. Поэтому u и v соединены в $\Gamma - e$, а потому и в Γ приведенным путем p, все ребра которого отличны от $e^{\pm 1}$. С другой стороны, в Γ имеется путь из u в v, состоящий из одного ребра e. Он, разумеется, также приведен, что противоречит единственности.

3) $\Rightarrow$ 4) Пусть все ребра графа Γ — мосты. Мы хотим доказать отсутствие простых циклов. Рассуждая от противного, рассмотрим некоторый простой цикл p. Он непуст, поэтому можно взять его первое ребро и обозначить через e. Положим $p = eq$. Тогда, если мы удалим из Γ ребро e, полученный граф все равно останется связным, так как вместо прохождения ребра e мы можем воспользоваться обходным путем q^{-1}. (Более формально, поскольку любые две вершины соединены некоторым путем r в Γ, то они будут соединены путем и в $\Gamma - e$, если заменить в r все вхождения ребра e на q^{-1}, а вхождения e^{-1} — на q.) Итак, мы нашли ребро, не являющееся мостом, что привело нас к противоречию.

4) $\Rightarrow$ 1) Эта импликация прямо следует из леммы 1, если рассуждать от противного.

Доказательство завершено.

В конце данного раздела мы докажем одно важное утверждение, справедливое не только для конечных, но и для бесконечных графов. Для конечного случая доказательство могло бы быть несколько проще. В общем случае нам потребуются некоторые теоретико-множественные средства, а именно лемма Цорна. (Мы не будем здесь напоминать ее формулировку.)

Если T есть подграф графа Γ, то мы говорим, что T есть *поддерево* в Γ. Если такое поддерево вдобавок содержит все вершины графа Γ, то его называют *максималь-*

ным или *остовным* поддеревом в Г. Для его существования необходима связность графа, так как любые две вершины графа можно соединить путем в этом дереве. На самом деле этого и достаточно.

Теорема 6 *Любой связный граф имеет максимальное поддерево.*

Доказательство. Пусть Г — связный граф. Рассмотрим множество всех его поддеревьев и обозначим его через $\mathcal{A}$. На множестве $\mathcal{A}$ задано отношение частичного порядка $\leq$, являющееся отношением включения. С помощью леммы Цорна докажем, что в $\mathcal{A}$ имеется максимальный элемент. Для этого достаточно проверить, что любое линейно упорядоченное подмножество $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ имеет верхнюю грань в $\mathcal{A}$. Рассмотрим объединение всех подграфов, принадлежащих $\mathcal{B}$. Обозначая это объединение через S, покажем, что оно является дерев м. (Под объединением семейства подграфов мы понимаем подграф, образованный в еми вершинами и ребрами подграфов из этого семейства.)

Вначале установим, что S связен. Пусть v_1, v_2 — произвольные вершины подграфа S. Из определения S следует, что найдутся деревья $T_1, T_2 \in \mathcal{B}$ такие, что v_i принадлежит T_i $(i = 1,2)$. Поскольку множество $\mathcal{B}$ линейно упорядочено, одно из деревьев T_1, T_2 содержит другое. Пусть это дерево T_i. Тогда v_1 и v_2 лежат в T_i. В этом дереве их можно соединить путем, который будет также путем в S, так как S содержит T_i. В итоге вершины v_1, v_2 можно соединить в S путем, то есть S — связный граф.

Теперь проверим, что S — граф без циклов. Предположим противное. Тогда в S имеется непустой приведенный цикл $p = e_1 \dots e_n$. Для каждого ребра e_i можно указать некоторое дерево T_i из B, содержащее ребро e_i $(1 \leq i \leq n)$. Среди конечного множества элементов линейно упорядоченного множества всегда найдется наибольший. Пусть это будет дерево T_i. Оно содержит все остальные деревья, поэтому ему принадлежат все ребра $e_1, \dots, e_n$. П этому p будет путем в T_i. Но T_i является графом без циклов, что дает противоречие.

Таким образом, S есть дерево. Оно принадлежит $\mathcal{A}$ и является верхней гранью множества $\mathcal{B}$, так как содержит все деревья из $\mathcal{B}$. Лемма Цорна приводит к выводу, что в $\mathcal{B}$ есть максимальный элемент. Это есть некоторое поддерево T в Г. Достаточно доказать, что оно содержит все вершины графа Г.

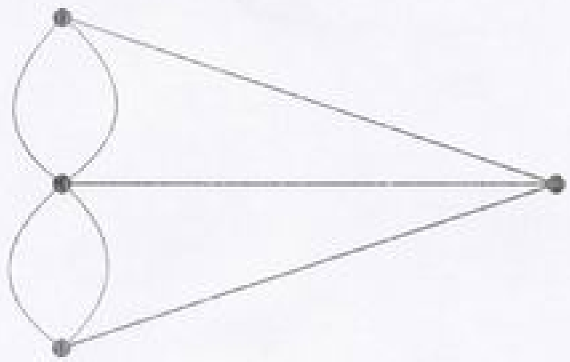
Предполагая противное, рассмотрим вершину v графа Г, не принадлежащую T. Отметим также какую-нибудь вершину w в T. Воспользуемся связностью графа Г и соединим в нем вершину v с вершиной w путем q. Запишем q в виде последовательности вершин и ребер: $q = (u_0, f_1, \dots, f_m, u_m)$. При этом $u_0 = v$ не лежит в T. Рассмотрим максимальное k, для которого u_k не лежит в T. Ясно, что $k < m$, так как $u_m = w$ лежит в T. Тогда вершина u_{k+1} существует и лежит в T. Мы нашли ребро $f = f_{k+1}$ такое, что $\alpha(f) = u_k$ не лежит в T, а $\omega(f_{k+1}) = u_{k+1}$ лежит в T. Присоединим ребро f к T, то есть рассмотрим подграф T', образованный T и подграфом из одного ребра f. Достаточно проверить, что T' — дерево. Это приведет к противоречию с тем, что T максимально, то есть не содержится в большем поддереве.

Связность графа T' очевидна, так как любую вершину графа T' можно соединить в нем с u_{k+1} (либо в T, либо с помощью ребра f). Воспользуемся теоремой 5. Если T' не есть дерево, то в T' имеется простой цикл. Он не может содержаться в T, поэтому содержит что-то из того, что мы присоединили к T, а именно, вершину u_k или ребро $f^{\pm 1}$. Во втором случае в цикле есть вершина u_k, так что рассмотрим только первый случай. В простом цикле для любой его вершины имеется ровно одно входящее ребро и ровно одно выходящее. Но в вершину u_k в графе T' входит только f^{-1}, а выходит из нее только f. Но оба эти ребра одновременно не могут принадлежать простому циклу.

Теорема доказана.

10 Эйлеровы графы

В историческом плане возникновение теории графов обычно связывают со следующей *задачей о кёнигсбергских мостах*. Требовалось выяснить, можно ли совершить обход всех мостов через реку в городе Кёнигсберге (ныне Калининград), пройдя по каждому из мостов ровно по одному разу. Леонард Эйлер применил такой подход: он изобразил в виде точек все острова и участки суши, соединив их линиями, проходящими через мосты. Получилась следующая схема:



Таким образом, говоря современным языком, требовалось определить, можно ли обойти граф, изображенный на рисунке, пройдя по каждому из ребер ровно по разу (имеются в виду неориентированные ребра). Когда мы говорим, что путь p каждое неориентированное ребро проходит один раз, мы имеем в виду, что для любого $e \in E$ ровно одно из ориентированных ребер e, e^{-1} входит в путь p. Задачу обхода графа по ребрам можно рассматривать в двух версиях, налагая или не налагая требование, чтобы маршрут обхода был замкнутым. Введем следующее определение.

Определение 11 Пусть Γ — конечный связный граф. Он называется *эйлеровым*, если существует замкнутый путь, который каждое неориентированное ребро графа проходит ровно один раз. Если существует путь с этим же свойством, но не обязательно замкнутый, то мы называем граф *полуэйлеровым*.

Допустим, в графе имеется эйлеров цикл, то есть замкнутый путь, проходящий по каждому неориентированному ребру ровно один раз. Легко видеть, что валентность каждой вершины должна быть четной, так как путь входит в каждую из вершин столько же раз, сколько раз из нее выходит. Аналогично, если имеется не замкнутый путь с таким же свойством, то валентности всех вершин, кроме начальной и конечной, четны по той же причине, а валентности начальной и конечной вершин из этих же соображений обязаны быть нечетными. По этой причине требуемый обход кёнигсбергских мостов невозможен, так как вершины соответствующего графа имеют валентности 3 или 5 (см. рисун), то есть имеется более двух вершин нечетной валентности. Граф, таким образом, не является даже полуэйлеровым.

Мы хотим описать все эйлеровы графы. Нам уже известно, что необходимым условием является связность графа и четность валентностей всех его вершин. На самом деле этого достаточно.

Теорема 7 *Конечный граф* Γ *является эйлеровым тогда и только тогда, когда он связен, и все его вершины имеют четную валентность.*

Доказательство. Нам достаточно доказать существование эйлерова цикла в любом конечном связном графе с четными валентностями вершин. Мы проведем индукцию по числу ребер графа. Если ребер нет, то вершина всего одна ввиду связности. Такой граф обладает пустым эйлеровым циклом.

Пусть имеется конечный связный граф Γ с четными валентностями вершин. Считаем наше утверждение доказанным для графов с меньшим числом ребер. Если Γ является деревом, то он состоит из одной вершины, так как в противном случае в нем имелась бы вершина валентности 1 по теореме 3. Но граф из одной вершины эйлеров. Поэтому в силу теоремы 5 в Γ есть некоторый простой цикл p. Удалим из Γ все ребра цикла p. При этом все валентности вершин останутся четными, так как все вершины простого цикла имеют валентность 2. Граф Γ', полученный из Γ удалением ребер цикла, имеет меньше ребер, но он, вообще говоря, не связен. Поэтому рассмотрим его связные компоненты $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$. По предположению индукции все они являются эйлеровыми.

Для начала убедимся в том, что каждая из компонент Γ_i $(1 \le i \le m)$ имеет общую вершину с циклом p. Для этого выберем некоторую вершину v в Γ_i и соединим ее путем q в графе Γ с некоторой вершиной w, принадлежащей циклу p. Если путь q целиком лежит в Γ_i, то там же лежит и вершина w. В противном случае рассмотрим первое ребро e пути q, не принадлежащее Γ_i. Его начальная вершина u обязана принадлежать Γ_i. В случае $v = u$ это очевидно, а если $u \ne v$, то в пути q есть ребро, предшествующее e. Оно принадлежит Γ_i в силу выбора ребра e. Но тогда в Γ_i лежит и его конечная вершина u. В итоге мы можем заключить, что ребро e не принадлежит ни к одному из подграфов Γ_j при $j \ne i$, поскольку там нет вершины u. Отсюда следует, что e входит в $p^{\pm 1}$, а потому вершина u есть общая вершина компоненты и цикла.

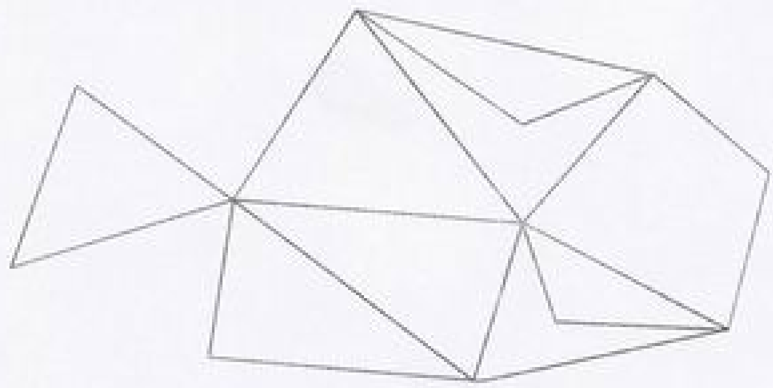
Выберем в каждой из компонент Γ_i некоторую вершину v_i, принадлежащую циклу $(1 \le i \le m)$. Все эти вершины попарно различны, так как принадлежат разным компонентам. Мы уже отмечали, что в каждой из компонент имеется эйлеров цикл. Легко показать, что эйлеров цикл в графе проходит через каждую из вершин. Поэтому можно рассмотреть эйлеров цикл, начинающийся и кончающийся в заданной вершине. Обозначим через r_i эйлеров цикл в Γ_i с началом и концом в v_i. Теперь все готово для построения эйлерова цикла в Г.

Вершины $v_1, \ldots, v_m$ разбивают цикл p в произведение нескольких путей. Можно перенумеровать эти вершины так, чтобы они располагались в пути p по порядку. Тогда $p = p_0 p_1 \ldots p_m$, где v_i есть конец p_{i-1} и начало p_i для всех i от 1 до m. Проходя по пути p, будем проходить по циклу r_i, если мы вошли в вершину v_i $(1 \leq i \leq m)$. Мы получим замкнутый путь $p_0 r_1 p_1 r_2 \ldots p_{m-1} r_m p_m$, который будет искомым эйлеровым циклом в Г.

Теорема доказана.

Заметим, что тем же способом можно доказать, что все ребра эйлерова графа можно разбить на простые циклы, попарно не имеющие общих ребер. Это дает еще один критерий эйлеровости связного графа.

Задача 15 Найти эйлеров цикл в графе, а также указать разбиение множества его ребер на простые циклы.



Имея критерий эйлеровости графа, нетрудно дать критерий для свойства графа быть полуэйлеровым. Предположим, что в графе Г имеется не замкнутый путь, проходящий каждое ребро по разу (полуэйлеров путь). Мы уже отмечали, что начало и конец этого пути имеют нечетную валентность, а все остальные вершины — четную. Этого условия достаточно для полуэйлеровости связного графа. В самом деле, если есть ровно две вершины нечетной валентности в графе, то можно их соединить новым ребром, и при этом все валентности станут четными. В таком графе найдется эйлеров цикл по теореме 7. Мы можем начать обход так, чтобы новое ребро проходилось в этом цикле последним. Тогда путь без прохождения этого ребра будет полуэйлеровым путем в исходном графе.

Таким образом, мы приходим к следующему утверждению.

Теорема 8 *Связный граф является полуэйлеровым тогда и только тогда, когда в нем либо нет вершин нечетной валентности, либо их ровно две.*

Отметим, что графов, в которых есть ровно одна вершина нечетной валентности, быть не может ввиду "леммы о рукопожатиях" (теорема 1).

Теорема 7 доказывает существование эйлерова цикла в связном графе с четными валентностями вершин, но не дает удобного способа такой цикл находить. Однако имеется удобный алгоритм для этого, называемый *алгоритмом Флери*. Перейдем к его описанию.

Пусть имеется связный граф Γ, у которого все валентности вершин четны. Начиная с некоторой вершины v, будем проходить ребра графа. Пройденные ребра мы будем удалять. Если после удаления ребер возникают изолированные вершины, то они также удаляются. При этом проходить ребра можно как угодно, нужно лишь придерживаться следующего правила: проходить мост имеющегося в наличии графа только тогда, когда нет других возможностей.

В конце описанного процесса мы должны вернуться в вершину v, а все ребра окажутся стертыми. На последнем шаге мы удалим саму вершину v. (Это будет значить, что нами был осуществлен обход ребер графа по эйлерову циклу.) Мы сейчас докажем, что это на самом деле так и будет.

Покажем вначале, что на любом шаге алгоритма, кроме последнего, у нас имеется в наличии связный граф Γ', содержащий вершину v. На начальном этапе это так. Пусть это так на некотором шаге. Если этот шаг не последний, то граф Γ' должен иметь ребра. Поэтому некоторое ребро мы далее проходим и затем стираем. Если мы прошли не по мосту, то граф остается связным. Допустим, что мы прошли по мосту, выходя из вершины u. Проверим, что это могло быть только тогда, когда u является висячей вершиной.

Поскольку мы прошли по мосту, у нас не было других возможностей. Поэтому все ребра, выходящие из u — это мосты. Если такой мост всего один, то u является висячей. Предположим, что из u выходит более одного ребра. Обозначим эти ребра через $e_1, \ldots, e_n$, где $n \geq 2$, а их концевые вершины через $v_1, \ldots, v_n$ соответственно. Ни одно из этих ребер не является петлей. Также можно заключить, что концевые вершины этих ребер попарно различны. (Если $v_i = v_j$ при $i \neq j$, то e_i, e_j — не мосты.) Из этого следует, что если мы удалим ребра $e_1, \ldots, e_n$ и остающуюся после этого вершину u, то останется n связных компонент (рекомендуем убедиться в этом самостоятельно). В одной из этих связных компонент заведомо не окажется вершины v. Обозначим эту компоненту через Γ_i, и пусть она содержит вершину v_i.

Важное замечание состоит в том, что на любом шаге алгоритма либо все вершины имеющегося у нас в распоряжении графа имеют четную валентность (в случае $u = v$), либо имеются ровно две вершины нечетной валентности — u и v. Это вытекает из того, что когда мы покидаем вершину, то уменьшаем ее валентность на единицу, и то же происходит, когда мы входим в вершину. Поэтому все вершины, в которые мы вошли и из которых мы вышли, будут по-прежнему иметь четную валентность. Из нашего замечания следует, что все вершины подграфа Γ_i в графе Γ' имеют четную валентность, так как среди них нет ни u, ни v. Но тогда в самом графе Γ_i будет ровно одна вершина нечетной валентности — вершина v_i. Это противоречит "лемме о рукопожатиях".

Таким образом, u есть висячая вершина графа Γ'. Из этого, в частности, следует, что $u \neq v$. Проходя по единственному ребру, выходящему из u, мы получаем граф с двумя связными компонентами, одна из которых состоит из u. Удаляя затем изолированную вершину u, мы оставляем связный граф, в котором есть вершина v. В итоге мы доказали, что на любом шаге мы имеем связный граф, содержащий v. Поэтому на последнем шаге не может остаться ребер, следовательно, не останется и вершин, кроме v. Нам останется только стереть вершину v. Этим обоснование алгоритма Флери завершено.

11 Гамильтоновы графы

Наряду с эйлеровыми графами естественно рассмотреть графы, которые можно обойти, побывав в каждой вершине ровно один раз. Такие графы называются гамильтоновыми. Название связано с тем, что У. Гамильтон (W. Hamilton) исследовал вопрос о возможности обхода графа, соответствующего додекаэдру.

Определение 12 Конечный граф Γ называется *гамильтоновым*, если существует замкнутый путь в Γ, содержащий каждую из вершин графа ровно один раз (при этом начальная и конечная вершина пути считается только один раз). Соответствующий замкнутый путь называется *гамильтоновым циклом* в Γ.

Из определения следует, что всякий гамильтонов граф связен. Далее, мы не запрещаем петли и кратные ребра. Легко видеть, что они никак не влияют на свойство графа быть гамильтоновым. Поэтому имеет смысл далее рассматривать только простые графы. Отметим также, что простой граф, имеющий две вершины, соединенные ребром, является согласно определению гамильтоновым.

Задача 16 Найти гамильтонов цикл в графе додекаэдра.

Следует отметить, что не известно никаких удобных критериев свойства графа быть гамильтоновым. Существующие алгоритмы проверки графа на гамильтоновость являются, по сути дела, алгоритмами полного перебора. В этом состоит существенное отличие гамильтоновых графов от эйлеровых (для последних, как мы видели, существуют удобные критерии и алгоритмы). Тем больший интерес представляют достаточные условия гамильтоновости. Очевидно, что всякий полный конечный граф гамильтонов. Следующее утверждение показывает, что всякий граф, в котором "достаточно много" ребер, является гамильтоновым. Оно было доказано Габором Дираком (G. A. Dirac) в 19[illegible] году.

Теорема 9 *Если в простом графе Γ с n вершинами валентность каждой вершины не меньше $n/2$, то граф Γ является гамильтоновым.*

Доказательство. Через $\Gamma(m)$ обозначим граф, получаемый из Γ добавлением m новых вершин, каждая из которых соединена ребром с каждой вершиной из Γ ($m \geq 0$). Легко видеть, что граф $\Gamma(n)$ гамильтонов. Действительно, пусть $v_1, \ldots, v_n$ — вершины графа Γ, а $w_1, \ldots, w_n$ — добаленные к Γ вершины. Ясно, что в $\Gamma(n)$ имеется гамильтонов цикл $v_1 \to w_1 \to v_2 \to w_2 \to \ldots \to v_n \to w_n \to v_1$. Выберем наименьшее $m \geq 0$ такое, при котором $\Gamma(m)$ гамильтонов. Мы хотим доказать, что $m = 0$.

Рассуждая от противного, предположим, что $m > 0$. Рассмотрим в $\Gamma(m)$ некоторый гамильтонов цикл. Он проходит по крайней мере через одну из добавленных вершин, причем ясно, что добавленные вершины не могут быть соседними, так как они не соединены ребром. Таким образом, в нашем гамильтоновом цикле есть (циклический) подпуть вида $v \to p \to w$, где v, w — вершины из Γ, а p — добавленная к Γ вершина. Если бы вершины v, w были смежными, то можно было бы обойтись без вершины p, уменьшая тем самым значение m. Рассмотрим отображение f множества вершин графа $\Gamma(m)$ в себя, обозначая через $f(u)$ вершину, следующую за u в выбранном гамильтоновом цикле для любой вершины u графа $\Gamma(m)$). Докажем такое утверждение: если u смежна v, то $f(u)$ не смежна w.

Рассуждаем от противного. Предположим, что u смежна v, а $f(u)$ смежна w. Если $u = p$, то $f(u) = w$, что невозможно, так как w не смежна сама себе. Тогда гамильтонов цикл в $\Gamma(m)$ имеет вид $v \to p \to w \to \ldots \to u \to f(u) \to \ldots$. Произведем следующее преобразование: удалим вершину p, а часть цикла между w и u перевернем. Получится замкнутый путь $v \to u \to \ldots \to w \to f(u) \to \ldots \to v$, являющийся гамильтоновым циклом в $G(m-1)$. Это противоречит минимальности числа m добавленных вершин. Таким образом, для любой вершины u, смежной v, вершина $f(u)$ не является смежной w. Поскольку отображение f инъективно, можно сделать вывод, что число вершин, смежных v, не превосходит числа вершин, не смежных w. По условию, в Γ имеется не менее $n/2$ вершин, смежных v. Кроме того, v смежна еще каждой из m добавочных вершин. Всего имеется не менее $n/2 + m$ вершин в $\Gamma(m)$, смежных v. То же самое можно сказать про вершину w. Так как всего в $\Gamma(m)$ имеется $n + m$ вершин, можно сделать вывод, что из них не более $(n+m) - (n/2 + m) = n/2$ не смежны w. Таким образом, мы пришли к противоречию, так как число вершин, смежных v, оказалось больше, чем число вершин, не смежных w в силу неравенства $n/2 + m > n/2$.

Теорема доказана.

Отметим, что условие теоремы Дирака весьма далеко от того, чтобы быть необходимым. (Достаточно взять циклический граф, в котором валентность каждой вершины равна 2.) Тем не менее, оценку из теоремы нельзя понизить, заменяя $n/2$ на $n/2 - 1$. В самом деле, пусть $n = 2k$. Рассмотрим в качестве графа Γ дизъюнктное объединение двух полных графов с k вершинами. Полученный граф заведомо не гамильтонов, так как он даже не связен. Валентность каждой вершины этого графа равна $k - 1 = n/2 - 1$, что показывает невозможность усиления оценки.

Условие гамильтоновости можно слегка ослабить. Назовем конечный граф *полу-*

полугамильтоновым, если он либо гамильтонов, либо в нем существует не замкнутый путь, содержащий каждую вершину ровно один раз.

Задача 17 Доказать, что граф Петерсена не является гамильтоновым, но является полугамильтоновым.

Предложим еще несколько упражнений.

Задача 18 Дан простой граф Г, вершинами которого являются все упорядоченные пары вида (i, j), где $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Две вершины (i_1, j_1) и (i_2, j_2) соединены в Г ребром тогда и только тогда, когда $\{|i_1 - i_2|, |j_1 - j_2|\} = \{1, 2\}$. Доказать, что Г гамильтонов.

Задача 19 Привести 4 примера графов:

а) эйлеров и гамильтонов

б) эйлеров и негамильтонов

в) неэйлеров и гамильтонов

г) неэйлеров и негамильтонов

12 Размеченные деревья. Теорема Кэли

В связи с теоремой о максимальном поддереве возникает вопрос о том, сколькими способами можно выбрать максимальное поддерево в полном графе K_n. Удобно занумеровать вершины полного графа натуральными числами от 1 до n. При этом вершины любого максимального поддерева также будут занумерованы. Простой граф с n вершинами мы называем *размеченным*, если его вершины занумерованы числами от 1 до n. Два размеченных графа считаются *изоморфными как размеченные графы* (то есть по существу одинаковыми), если для любых i, j от 1 до n вершины с номерами i, j соединены ребром в одном из графов в том и только в том случае, когда они соединены в другом. Заметим, что графы могут быть изоморфны как графы, но при этом не изоморфны как размеченные графы.

Предложим следующие два упражнения, связанных с понятием размеченного графа.

Задача 20 Найти число простых размеченных графов с n вершинами.

Задача 21 Простой конечный граф назовем E-графом, если все его вершины имеют четную валентность (т. е. все связные компоненты графа эйлеровы). Доказать, что размеченных E-графов с n вершинами столько же, сколько простых размеченных графов с $n-1$ вершиной.

Нас далее будут интересовать в основном размеченные деревья. Легко убедиться в том, что максимальных поддеревьев в K_n ровно столько, сколько имеется размеченных деревьев с n вершинами. Следующая теорема, доказанная Артуром Кэли (A. Cayley), указывает их количество.

Теорема 10 *Число максимальных поддеревьев в полном графе с n вершинами равно n^{n-2}.*

Доказательство. Несмотря на простой ответ, теорема имеет довольно сложное доказательство. Мы будем подсчитывать число размеченных деревьев с n вершинами. При $n = 1$ имеется одно такое дерево, что согласуется с ответом. Далее считаем, что $n > 1$.

Обозначим через k валентность первой вершины. Она принимает значения от 1 до $n-1$. Пусть $T(n,k)$ — это число размеченных деревьев с n вершинами, у которых первая вершина имеет валентность k. Мы хотим вычислить значения величин $T(n,k)$ при k от $n-1$ до 1. При этом искомое число всех размеченных деревьев будет равно $T(n,1) + T(n,2) + \ldots + T(n,n-1)$.

Очевидно, что $T(n,n-1) = 1$. Наша цель — выразить $T(n,k-1)$ через $T(n,k)$ при $1 < k < n$. С этой целью рассмотрим произвольное дерево Γ с валентностью первой вершины равной k. Обозначим через v первую вершину, через $e_1, \ldots, e_k$ все исходящие из нее ориентированные ребра, а через $v_1, \ldots, v_k$ соответственно их концевые вершины. Удаляя из Γ ребра $e_1, \ldots, e_k$ и обратные к ним, а затем удаляя изолированную вершину v, мы получим граф Γ' без циклов. Его связные компоненты суть деревья. Их имеется ровно k, и каждое из них "привязано" к одной из вершин v_1, $\ldots, v_k$. Этот факт, как принято говорить, "наглядно очевиден", но мы предпочитаем дать строгое тому доказательство.

Прежде всего заметим, что граф Γ' имеет не менее k связных компонент, так как в этом графе никакие две вершины из списка $v_1, \ldots, v_k$ нельзя соединить путем. В противном случае имеется некоторый приведенный путь из v_i в v_j при $i \neq j$. Он же является приведенным путем из v_i в v_j в Γ. Но в Γ есть еще путь $e_i^{-1}e_j$ из v_i в v_j. Он также приведен. Поскольку Γ — это дерево, двух таких приведенных путей быть не может по теореме 5. Следовательно, вершины v_i и v_j принадлежат различным компонентам связности графа Γ'.

Осталось проверить, что любая вершина графа Γ' может быть в этом же графе соединена путем с одной из вершин вида v_i ($1 \leq i \leq k$). Пусть u — произвольная вершина графа Γ'. Граф Γ связен, поэтому в Γ имеется путь из v в любую вершину. Рассмотрим путь p в Γ минимально возможной длины, начинающийся в u и оканчивающийся в одной из вершин списка $v_1, \ldots, v_k$. Нам достаточно показать, что p — путь в Γ'. Для этого достаточно проверить, что p не проходит через вершину v. Тогда он не содержит ребер вида $e_1, \ldots, e_k$ и обратных к ним, то есть является путем в Γ'.

Предположим противное: пусть p проходит через v. Мы знаем, что v не есть начальная вершина пути p. Поэтому путь p содержит ребро, оканчивающееся в v. Все такие ребра принадлежат списку $e_1^{-1}, \ldots, e_k^{-1}$. Поэтому путь p, прежде чем достичь вершину v, должен пройти через начало одного из этих ребер, то есть через одну из точек $v_1, \ldots, v_k$. Это противоречит тому, что p был выбран кратчайшим.

Итак, мы выяснили, что Γ' имеет ровно k связных компонент. Обозначим связные компоненты вершин $v_1, \ldots, v_k$ через $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$ соответственно (все они — деревья).

Сейчас мы сопоставим изначальном дереву Γ некоторое дерево, у которого вершина с номером 1 имеет валентность $k-1$. Для этого удалим сначала некоторое ребро e_i ($1 \le i \le k$). Получится граф с двумя связными компонентами, одна из которых есть Γ_i. Теперь зафиксируем произвольную вершину w графа Γ, отличную от v и не принадлежащую Γ_i. Эту вершину мы соединим ребром с v_i. Получится дерево, так как мы имели дизъюнктное объединение двух деревьев и соединили ребром вершины из разных компонент. Валентность вершины с номером 1 равна $k-1$. По сути дела, мы осуществили "пересадку" ребра e_i, отсоединив его от вершины v и присоединив к вершине w.

Подсчитаем число способов осуществить описанную пересадку. Через n_i обозначим число вершин в Γ_i ($1 \le i \le k$). Понятно, что $n_1 + \ldots + n_k = n-1$. Для ребра e_i имеется $n-1-n_i$ способов его пересадить. Суммируя по i, получаем

$$\sum_{i=1}^{k}(n-1-n_i) = k(n-1) - \sum_{i=1}^{k} n_i = k(n-1)-(n-1) = (k-1)(n-1).$$

С учетом того, что дерево Γ может быть выбрано $T(n,k)$ способами, всего имеется $(k-1)(n-1)T(n,k)$ способов осуществить пересадку. У дерева, возникшего после пересадки, мы отметим пересаженное ребро.

Рассмотрим теперь операцию, в некотором смысле обратную описанной выше. Пусть имеется размеченное дерево Λ с n вершинами, в котором вершина v (имеющая номер 1) имеет валентность $k-1$. Укажем естественный способ сопоставить ему дерево, в котором v будет иметь валентность k. Для этого выберем в Λ произвольное ребро e, не инцидентное v. Удаление этого ребра дает дизъюнктное объединение двух деревьев. При этом две вершины — начало и конец ребра e — оказываются в разных компонентах связности. Возьмем ту из этих вершин, которая не принадлежит связной компоненте вершины v и соединим ее новым ребром с вершиной v. В результате получится дерево, где v имеет валентность k. Заметим, что для осуществления описанной только что операции мы выбираем по сути дела неориентированное ребро. Всего таких ребер в дереве Λ на единицу меньше, чем вершин, то есть $n-1$. Но мы при этом не берем ребра, инцидентные v, которых имеется $k-1$. Следовательно, у нас ровно $(n-1)-(k-1) = n-k$ способов выбора. Умножая на число $T(n,k-1)$ деревьев, в которых v имеет валентность $k-1$, мы получаем величину $(n-k)T(n,k-1)$.

Утверждается, что обе величины, подсчитанные нами, равны, то есть $(k-1)(n-1)T(n,k) = (n-k)T(n,k-1)$. Чтобы обосновать это, уточним, что же мы подсчитали в первом и во втором случае, а затем увидим, что между объектами, подсчитанными первым и вторым способом, имеется взаимно однозначное соответствие.

После осуществления первой операции имеется размеченное дерево, в котором вершина v с номером 1 имеет валентность $k-1$. В этом дереве имеется отмеченное ребро e. Можно осуществить вторую операцию, пересаживая ребро e. Очевидно, что если мы отсоединим ребро e от вершины w и подсоединим к v, то получится исходное дерево Γ (до применения первой из операций). Если мы теперь его удалим, то вершина v_i не будет лежать с v в одной связной компоненте. Следовательно, осуществление второй операции происходит так: мы должны удалить e, а затем выбрать его начало или конец, не лежащий в одной компоненте с v. Это будет как раз вершина v_i. Соединяя ее новым ребром с v, мы получаем в точности исходное дерево Γ. Из этого следует важный вывод, что после применения первой операции может возникнуть **любое** дерево, в котором v имеет валентность $k-1$, и при этом любое ребро, не инцидентное v, оказывается отмеченным. Число способов задать дерево и отметить в нем ребро описанным только что способом есть в точности $(n-k)T(n,k-1)$. Оно равно числу объектов, возникающих после применения первой операции, а это есть $(k-1)(n-1)T(n,k)$.

Таким образом, мы можем заключить, что

$$T(n,k-1) = \frac{(k-1)(n-1)T(n,k)}{n-k}.$$

Отсюда с учетом $T(n,n-1) = 1$ имеем $T(n,n-2) = (n-1)(n-2)$, $T(n,n-3) = (n-1)^2(n-2)(n-3)/2$ и так далее. Индукцией по s докажем, что $T(n,n-s) = (n-1)^{s-1}C_{n-2}^{s-1}$ для всех s от 1 до $n-1$. При $s = 1,2,3$ это так. Предполагая истинность доказываемого равенства для некоторого значения $s < n-1$, докажем, что оно истинно для значения $s+1$. Используя зависимость между $T(n,n-s-1)$ и $T(n,n-s)$, а также предположение индукции, имеем:

$$T(n,n-(s+1)) = \frac{(n-s-1)(n-1)T(n,n-s)}{s} = (n-1)^s\,\frac{(n-s-1)C_{n-2}^{s-1}}{s} =$$

$$= (n-1)^s\,\frac{(n-s-1)(n-2)!}{s(s-1)!(n-s-1)!} = (n-1)^s\,\frac{(n-2)!}{s!(n-s-2)!} = (n-1)^s C_{n-2}^s,$$

что и требовалось установить. Окончательно имеем, с использованием формулы бинома Ньютона, что число размеченных деревьев с n вершинами равно

$$\sum_{s=0}^{n-2} T(n,n-(s+1)) = \sum_{s=0}^{n-2} C_{n-2}^s(n-1)^s = ((n-1)+1)^{n-2} = n^{n-2}.$$

Теорема доказана.

13 Задача о соединении городов

Рассмотрим следующую задачу. Имеется n городов. Для любой пары городов известна стоимость соединения этих двух городов дорогой. Требуется соединить дорогами некоторые из городов, чтобы при этом из любого города по этим дорогам можно было добраться в любой, и чтобы при этом суммарная стоимость строительства оказалась минимальной.

Переведем условие задачи на язык теории графов. Мы имеем полный граф с n вершинами. Каждому (неориентированному) ребру e поставлено в соответствие положительное число $\mu(e)$ (*вес* ребра). Требуется указать такое множество ребер, чтобы они образовали связный подграф в K_n с n вершинами, и чтобы сумма весов ребер, входящих в этот подграф, была минимально возможной (эту сумму называем весом подграфа).

Легко понять, что задача имеет решение, так как имеется лишь конечное число подграфов в конечном графе. Поэтому среди допустимых условиями задачи подграфов найдется подграф минимального веса. Легко также видеть, что подграф, являющийся решением задачи, должен быть поддеревом. В противном случае в этом графе имелось бы ребро, которое можно удалить, не нарушая связности графа. Тогда вес, очевидно, уменьшился бы.

Наше дерево содержит все вершины, поэтому оно есть максимальное поддерево в K_n. Таким образом, нам было бы достаточно перебрать все максимальные поддеревья в K_n, а затем выбрать из них дерево минимального веса. Однако из теоремы Кэли мы знаем, что таких деревьев имеется n^{n-2}, что делает перебор практически невозможным уже при сравнительно малых значениях n. Поэтому представляет интерес более быстрый алгоритм. Таковой алгоритм имеется, и он является очень удобным для практического использования. Он называется *алгоритмом Краскала*. Дадим его описание.

Пусть имеется граф с n вершинами без ребер. Нам известен вес каждого из ребер, которые мы можем добавить. Будем последовательно добавлять ребра, пока это возможно, соблюдая следующие два условия.

1) Запрещается добавлять ребра, которые приводят к появлению нетривиальных циклов в графе. Иными словами, если две вершины уже соединены между собой некоторым путем, то добавлять ребро, их соединяющее, нельзя.

2) Из всех ребер, которые разрешается добавить (т. е. не запрещается согласно первому пункту), мы имеем право добавить любое ребро, имеющее минимальную стоимость среди "разрешенных".

Процесс оканчивается, когда ни одного из ребер добавить уже нельзя. Очевидно, что такой момент настанет, так как ребер конечное число. Проверим, что подграф T, получившийся в конце процесса, будет максимальным поддеревом в K_n. Этот подграф содержит все вершины, поскольку он содержал их изначально. Согласно пункту 1, в T нет циклов. Поэтому нужно лишь убедиться, что граф T связен. Предположим противное. Пусть имеются две вершины, которые мы не можем соединить путем в T. Тогда при добавлении ребра, их соединяющего, циклов не возникает. Следовательно, некоторые ребра еще можно добавить, то есть процесс не окончен.

Итак, T есть максимальное поддерево. Следующая теорема служит обоснованием алгоритма Краскала.

Теорема 11 *Построенный в ходе алгоритма Краскала подграф в K_n является решением задачи о соединении городов, то есть является максимальным поддеревом минимального веса.*

Доказательство. Допустим, что T не есть решение задачи. Тогда имеется максимальное поддерево S в K_n, имеющее меньший вес. Мы укажем процесс последовательного преобразования S в T, при котором не происходит увеличения веса. Это сразу приведет к противоречию с тем, что вес S меньше веса T.

Пусть $e_1, e_2, \ldots$ — ребра, последовательно добавляемые в ходе алгоритма Краскала. Среди них заведомо есть ребро, не принадлежащее S. Пусть $k \geq 1$ — наименьшее число, при котором ребро e_k не принадлежит S. Обозначим начало и конец e_k через u и v соответственно. В дереве S имеется геодезический путь p, соединяющий u и v. Рассмотрим путь pe_k^{-1} в K_n. Этот путь является замкнутым, и очевидно, что он циклически приведен, так как путь p не может содержать ребро e_k. Таким образом, pe_k^{-1} есть простой цикл. Он не содержится в T, так как в T нет циклов. Поэтому в цикле есть некоторое ребро e, отсутствующее в T. Заметим, что e входит в путь p, поэтому оно присутствует в S. Удалим теперь ребро e из S и заменим его на ребро e_k, получая граф S'. Мы утверждаем, что S' есть максимальное поддерево в K_n.

Удаление ребра e из дерева S приводит к дизъюнктному объединению двух деревьев, причем начало и конец ребра e окажутся в разных компонентах. Представим путь p в виде $p = p_1 e p_2$. Очевидно, что путь p_1 соединяет начало ребра e_k с началом ребра e, а путь p_2 соединяет конец e с концом e_k. Оба пути p_1, p_2 содержатся в $S - e$. Поэтому начало и конец ребра e_k также лежат в разных связных компонентах графа $S - e$. Отсюда вытекает, что добавление ребра e_k к $S - e$ будет деревом. Поскольку S' содержит все вершины, оно будет максимальным поддеревом в K_n.

Сравним теперь веса деревьев S и S'. Для этого надо сравнить веса ребер e и e_k. Рассмотрим шаг алгоритма Краскала, на котором мы добавили ребро e_k. Поскольку все ребра, добавленные до этого, лежат в S, а ребро e также лежит в S, то вместо ребра e_k к имеющимся на данном шаге ребрам можно было добавить и ребро e, не нарушая условия из пункта 1 алгоритма. (Циклов при этом бы не возникло, так как их нет в S.) Коль скоро e не было добавлено, это означает, что его вес либо больше веса ребра e_k, либо равен ему. Таким образом, $\mu(e) \geq \mu(e_k)$. Дерево S' получается из S заменой одного ребра на ребро не большего веса. Таким образом, вес S' не увеличился по сравнению с весом S. Остается заметить, что S' имеет с T на одно общее ребро больше, нежели S. Поэтому, продолжая этот процесс, мы в итоге преобразуем S в T, не увеличивая вес, что дает противоречие.

Теорема доказана.

14 Укладка графов в топологических пространствах

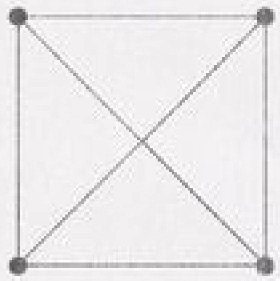
Часто приходится подходить к графам с геометрической точки зрения, считая, что они имеют геометрическую реализацию. Мы можем изобразить граф на плоскости или сфере, на какой-либо поверхности (например, на торе) или в трехмерном пространстве. Мы хотим дать общее определение геометрической реализации графа. Предполагается, что читатель знаком с основными понятиями топологии. (Если это не так, то вместо абстрактного топологического пространства ниже можно представлять себе либо плоскость, либо сферу, либо поверхность сферы с "ручками", либо трехмерное пространство.)

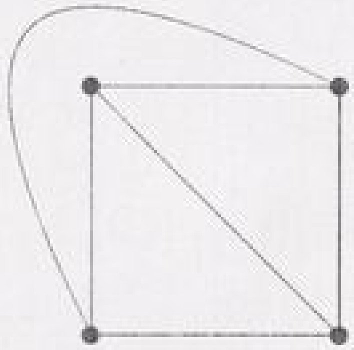
Пусть T — топологическое пространство. *Простым путем* в T называется образ отрезка $[0;1]$ при непрерывном инъективном отображении. Соответственно, *простым замкнутым путем* в T называется образ единичной окружности при непрерывном инъективном отображении. Пусть имеется граф Γ, вершинами которого служат точки пространства T, а ребрами — либо простые пути в T, либо простые замкнутые пути в T с отмеченной точкой. При этом должно выполняться несколько естественных условий. Во-первых, на каждом из ребер можно задать направление двумя способами. Такие направленные ребра будем считать ориентированными ребрами графа Γ. На множестве E ориентированных ребер естественным образом задается отображение $^{-1}$. Каждое направленное ребро, полученное из простого пути в T, имеет две концевые точки — образы нуля и единицы. Они должны быть вершинами графа Γ. Для направленного ребра $e \in E$ определены естественным образом его начальная вершина $\alpha(e)$ и конечная вершина $\omega(e)$. Если направленное ребро получено из простого замкнутого пути, то мы требуем, чтобы отмеченная точка была вершиной графа Γ, беря ее в качестве и начальной, и конечной вершины данного ребра. Таким образом, мы получаем граф Γ в смысле Серра, про который мы говорим, что он уложен в пространстве T. Нас далее будут интересовать такие укладки, при которых ребра попарно не пересекаются друг с другом во внутренних точках. Таким образом, говорят, что граф Γ *уложен без самопересечений в пространстве* T, если точки пересечения ребер могут быть только их начальными или конечными вершинами.

Пусть граф Γ уложен без самопересечений в пространстве T. Если T является плоскостью, то мы называем T *плоским графом*. Если T — это сфера, то мы говорим о *сферическом графе*. Если T представляет собой трехмерное пространство, то мы говорим о графе в $\mathbf{R}^3$. Аналогично может идти речь о графе на торе, графе на сфере с двумя ручками (поверхность кренделя) и так далее.

Определение 13 Граф называется *планарным*, если он изоморфен некоторому плоскому графу.

На рисунке изображены два графа с четырьмя вершинами. Первый из них не является плоским, так как ребра пересекаются во внутренних точках. Второй же граф является плоским. Однако оба графа изоморфны, причем оба они на самом деле изоморфны графу K_4. Поэтому все эти графы планарны. Данный пример иллюстрирует разницу между понятиями плоского и планарного графа.





Общий вопрос, который можно задать о графе, состоит в том, в каких топологических пространствах можно его уложить без самопересечений. Это означает, что граф изоморфен некоторму графу, уложенному без самопересечений в том или ином пространстве. Далее следует несколько утверждений, дающих сведения по этому поводу. Для простоты мы будем везде говорить о конечных графах, хотя многие из нижеследующих утверждений справедливы и в более общей ситуации.

Теорема 12 *Конечный граф можно уложить на сфере без самопересечений тогда и только тогда, когда его можно уложить без самопересечений на плоскости, то есть когда граф планарен.*

Доказательство. Основным инструментом при доказательстве является стереографическая проекция. Пусть и еется сфера в трехмерном пространстве. Рассмотрим какую-либо плоскость β, касающуюся сферы в некоторой точке S. Обозначим через N точку, диаметрально противоположную точке S. Для любой точки P плоскости β проведем луч NP. Легко видеть, что этот луч пересекает сферу еще в одной точке, помимо N. Обозначим эту точку через $\sigma(P)$. Отображение σ будет гомеоморфизмом (то есть оно взаимно однозначно и взаимно непрерывно отображает плоскость β на сферу с выколотой точкой N).

Таким образом, если граф уложен на плоскости без самопересечений, то его образ при σ даст требуемую укладку графа на сфере. Обратно, если граф уложен на сфере, то можно указать некоторую точку сферы, не совпадающую ни с одной из вершин и не принадлежащую ни одному из ребер (это заведомо верно, если граф конечен). Обозначая эту точку через N и рассматривая подходящую стереографическую проекцию σ, мы берем образ сферического графа при отображении σ^{-1}, что дает укладку на плоскости.

Теорема доказана.

Существуют графы, которые нельзя уложить на плоскости (а потому и на сфере) без самопересечений. Имеется два стандартных примера — это графы K_5 и $K_{3,3}$. Оба они не планарны, что будет доказано в одном из следующих разделов. Любой граф, который их в некотором смысле "содержит", также не будет планарным. Позже мы сформулируем теорему, которая показывает, что любой конечный граф, не являющийся планарным, "содержит" один из графов K_5 или $K_{3,3}$ в некотором строгом смысле. Следующие две теоремы показывают, что любой конечный граф можно реализовать в $\mathbf{R}^3$, а также на некоторой двумерной поверхности.

Теорема 13 *Всякий конечный граф можно уложить без самопересечений в трехмерном пространстве.*

Доказательство. Расположим все вершины графа на некоторой прямой ℓ. Проведем в трехмерном пространстве столько полуплоскостей с границей ℓ, сколько имеется дуг в графе. После этого каждую дугу (скажем, дугу окружности) проведем в своей полуплоскости. В результате получим искомую укладку графа в $\mathbf{R}^3$.

Это доказательство в равной степени работает для любых графов, у которых мощность множества вершин и мощность множества ребер не превосходят мощности континуума. Заметим, что никаких ограничений типа отсутствия петель или кратных ребер мы не накладываем. Если же конечный граф является простым, то возможна его укладка без самопересечений в $\mathbf{R}^3$, при которой все ребра являются отрезками. Для этого достаточно все точки расположить на сфере так, чтобы никакие четыре точки не лежали в одной плоскости. Располагая очередную точку, мы сначала проводим плоскости через любую тройку уже имеющихся точек. Каждая из плоскостей пересекает сферу по окружности. Конечное число окружностей не покрывает всю сферу, поэтому найдется место для очередной точки. Теперь, когда все вершины будущего графа расположены требуемым образом на сфере, мы просто соединяем отрезками те вершины, которые должны быть соединены в графе. Эти отрезки могут пересекаться только в вершинах, так как в противном случае мы получили бы 4 точки в одной плоскости.

Теорема доказана.

Напомним, что в курсе топологии рассматривается классификация двумерных многообразий. При этом компактные ориентируемые многообразия без края — это сферы с ручками. Чтобы присоединить к поверхности ручку, нужно просверлить в поверхности два небольших отверстия в форме окружностей, а затем взять боковую поверхность цилиндра и приклеить ее края, также являющиеся окружностями, к границам отверстий. Таким образом к сфере можно присоединить любое число $g \geq 0$ ручек. Получаемая поверхность (с точностью до гомеоморфизма) не зависит от того, куда именно мы подсоединяем ручки. Полученную поверхность мы называем *сферой с g ручками*. Число g называется *родом* этой поверхности. При $g = 0$ мы имеем обычную сферу, при $g = 1$ — тор, при $g = 2$ — поверхность кренделя с двумя ручками и так далее.

Теорема 14 *Всякий конечный граф можно уложить без самопересечений на сфере с g ручками при некотором $g \geq 0$.*

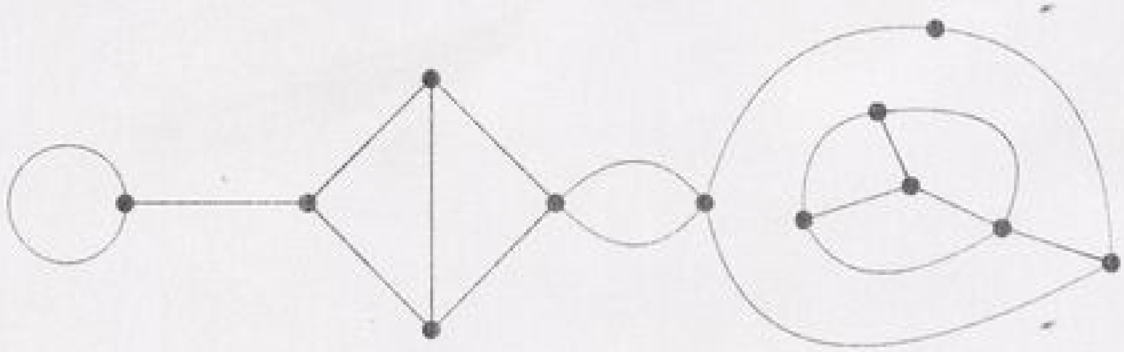
Доказательство. Нарисуем для начала граф на плоскости, причем пересечения дуг разрешаются. При этом плоскость можно считать частью сферы. Для любой точки пересечения дуг (можно считать, что их число конечно) присоединим к сфере маленькую ручку, проходящую поверх одной из дуг и направим вторую дугу по этой ручке. (Подобным образом поступают с трубопроводом, если нужно обойти препятствие.) В итоге получится требуемая укладка графа на двумерной поверхности, что завершает доказательство.

Легко видеть, что если граф уже уложен на сфере с некоторым числом ручек, то можно добавить к этой поверхности еще несколько ручек. Это говорит о том, что чем больше у поверхности ручек, тем больше у нас возможностей. В любом случае для конечного графа Γ имеется наименьшее число $g \geq 0$ такое, что Γ можно уложить на сфере с g ручками без самопересечений. Это число называется *родом* конечного графа Γ и обозначается $g(\Gamma)$. Графы рода 0 — это в точности планарные графы согласно теореме 12. Далее мы подсчитаем род некоторых графов, не являющихся планарными.

15 Формула Эйлера для плоских и сферических графов

При изучении вопроса об укладке графов на поверхностях достаточно ограничиться связными графами, так как если каждый из двух (конечных) графов можно уложить без самопересечений на любой из рассматриваемых нами поверхностях, то это же верно и для дизъюнктного объединения графов.

Пусть имеется конечный связный граф Γ, уложенный на плоскости $\mathbf{R}^2$ без самопересечений. Рассмотрим теоретико-множественное дополнение графа, то есть множество $\mathbf{R}^2 \setminus \Gamma$, где под Γ мы здесь для простоты понимаем множество всех точек плоскости, принадлежащих графу в естественном смысле. Множество $\mathbf{R}^2 \setminus \Gamma$ является открытым (в топологическом смысле слова). Оно разбивается на компоненты связности, среди которых имеется ровно одна неограниченная, а также некоторое число ограниченных. Ограниченные компоненты мы называем *гранями* плоского графа Γ, а неограниченную компоненту — *несобственной гранью*. Ввиду связности графа, любая грань гомеоморфна открытому двумерному диску. На рисунке изображен плоский граф Γ. Он имеет 12 вершин, 19 дуг (неориентированных ребер) и 8 граней (не считая несобственной). Обратим внимание на некоторые особенности этого графа, рассматривая данный случай как типичный.



Во-первых, граф содержит петли и кратные ребра. К каждому ребру примыкает с двух сторон по одной грани, среди которых одна или обе могут оказаться несобственными. Эти две грани не обязательно различны, даже если являются собственными. Далее, можно обойти вокруг любой грани по часовой стрелке. При этом получится некоторый замкнутый путь в Γ, называемый *контуром* грани. Длина этого пути называется *периметром* грани. Аналогично можно определить контур несобственной грани. Удобно договориться о том, что он читается в напрвлении против часовой стрелки.

Для числа вершин, ребер и граней конечного связного плоского графа выполняется некоторое соотношение, называемое формулой Эйлера. Мы будем неоднократно использовать далее обозначения $\mathbf{V}$, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{F}$ соответственно для числа вершин, ребер и граней плоского графа. Важно подчеркнуть, что здесь имеются в виду дуги, то есть неориентированные ребра. (Мы используем жирный шрифт для этих обозначений. Не следует их путать с обозначениями для множества вершин и ребер графа.)

Теорема 15 *Пусть* Γ *— связный конечный плоский граф. Тогда число вершин* $\mathbf{V}$, *число дуг* $\mathbf{E}$ *и число граней* $\mathbf{F}$ *этого графа связаны соотношением*

$$\mathbf{V} - \mathbf{E} + \mathbf{F} = 1.$$

Данное соотношение называется формулой Эйлера для плоских графов.

Доказательство. Мы проводим индукцию по числу граней. Для начала рассмотрим случай $\mathbf{F} = 0$. При этом граф Γ должен быть деревом. Действительно, в противном случае по теореме 5 в Γ имеется простой цикл. Внутри этого цикла содержится по крайней мере одна грань, вопреки условию $\mathbf{F} = 0$. Для дерева мы уже доказали соотношение $\mathbf{V} - \mathbf{E} = 1$ в теореме 4. Так что формула Эйлера справедлива при $\mathbf{F} = 0$.

Пусть теперь $\mathbf{F} > 0$. Для графов из условия теоремы, имеющих меньшее число граней, считаем формулу Эйлера доказанной. Сейчас нам нужно убедиться в том, что Γ не является деревом. Предположим противное, то есть предположим, что Γ — это дерево. При этом ясно, что имеется только несобственная грань. (Строгое доказательство базируется на том, что область $\mathbf{R}^2 \setminus \Gamma$ связна в топологическом смысле.) Но этот случай уже был рассмотрен. Таким образом, Γ не есть дерево, и потому содержит некоторый простой цикл p. Рассмотрим произвольное ребро e, входящее в этот цикл. Оно не является мостом, что было установлено при доказательстве теоремы 5. Удаление ребра e приводит к связному графу $\Gamma - e$. Он содержит столько же вершин, сколько и Γ и на одну дугу меньше. Посмотрим, что происходит с гранями.

В графе Γ к ребру e с обеих сторон примыкает некоторая грань. Та из этих граней, которая находится внутри цикла p, является собственной. Грань, примыкающая к ребру e с внешней по отношению к циклу p стороны, заведомо отлична от грани, находящейся внутри цикла. Внешняя грань может оказаться и несобственной. (Мы будем говорить о двух гранях, примыкающих к e, как о внутренней и внешней.) Когда мы удаляем ребро e, внутренняя грань сливается с внешней. Независимо от того, будет ли внешняя грань собственной или нет, количество граней после удаления ребра уменьшается на единицу. Таким образом, величина $\mathbf{V} - \mathbf{E} + \mathbf{F}$ для графа Γ будет такой же, как и для $\Gamma - e$, так как при переходе от Γ к $\Gamma - e$ на единицу уменьшились $\mathbf{E}$ и $\mathbf{F}$, а $\mathbf{V}$ не изменилось. По предположению индукции для графа $\Gamma - e$ величина $\mathbf{V} - \mathbf{E} + \mathbf{F}$ равна 1 (предположение индукции применимо, так как $\Gamma - e$ является связным конечным плоским графом, имеющим меньше граней по сравнению с Γ). Поэтому для Γ также справедлива формула Эйлера, что и требовалось доказать.

Теперь нетрудно получить формулу Эйлера для сферических графов. Если имеется граф на сфере, то при подходящей стереографической проекции он переходит в плоский. При этом вершины перейдут в вершины, ребра — в ребра, а грани — в грани, за исключением одной, в которой находится точка N, начало всех проводимых лучей. Эта грань перейдет в несобственную. Таким образом, в сферическом графе будет на одну грань больше. Тем самым доказана

Теорема 16 *Пусть Γ — связный конечный сферический граф. Тогда число вершин $\mathbf{V}$, число дуг $\mathbf{E}$ и число граней $\mathbf{F}$ этого графа связаны соотношением*

$$\mathbf{V} - \mathbf{E} + \mathbf{F} = 2.$$

Позже мы получим обобщение этой формулы на случай поверхностей более общего вида. Сейчас извлечем из формулы Эйлера несколько важных следствий. Ранее мы обещали доказать, что графы K_5 и $K_{3,3}$ не планарны.

Теорема 17 *Графы K_5 и $K_{3,3}$ не являются планарными.*

Доказательство. Вначале рассмотрим случай графа K_5. Допустим, что он планарен. Тогда его можно уложить без самопересечений на плоскости, а также на сфере. Рассмотрим соответствующий сферический граф, изоморфный K_5. К нему применима формула Эйлера. Ясно, что $\mathbf{V} = 5$, $\mathbf{E} = 10$ (в K_n имеется $n(n-1)/2$ дуг). Из формулы Эйлера $\mathbf{F} = 2 - \mathbf{V} + \mathbf{E} = 7$.

Заметим, что периметр любой грани не меньше трех, так как в противном случае сферический граф имел бы петли или кратные ребра. (На самом деле есть два исключения: одноточечный граф имеет одну грань, периметр которой равен нулю, а граф K_2, представляющий собой просто ребро, имеет одну грань периметра 2.)

Таким образом, сумма периметров всех граней не меньше $3 \cdot 7 = 21$. С другой стороны, любое ориентированное ребро входит в контур ровно одной грани (контуры всех граней сферического графа обходим так, что при этом обходимая область находится слева). Поэтому сумма периметров всех граней есть в точности количество ориентированных ребер, то есть $2\mathbf{E}$. В нашем случае это число равно 20. Это дает противоречивое неравенство $20 > 21$. Поэтому K_5 не планарен.

Для графа $K_{3,3}$ рассуждаем аналогично, считая, что он нарисован на сфере. При этом $\mathbf{V} = 6$, $\mathbf{E} = 9$, и формула Эйлера дает $\mathbf{F} = 2 - \mathbf{V} + \mathbf{E} = 5$. Поскольку граф $K_{3,3}$ является двудольным, в нем нет циклов нечетной длины. Поэтому периметр любой из граней не меньше 4. Отсюда сумма периметров всех граней оказывается не меньше $4 \cdot 5 = 20$. На самом же деле она, как и выше, равна $2\mathbf{E} = 18$, что приводит к противоречивому неравенству $18 > 20$. Поэтому граф $K_{3,3}$ также не планарен, что завершает доказательство теоремы.

В дальнейшем нам понадобится еще одно следствие формулы Эйлера, относящееся к свойствам простых планарных графов.

Теорема 18 *В любом конечном простом планарном графе найдется вершина, валентность которой не превосходит* 5.

Доказательство. Можно считать, что граф связен, рассматривая одну из его связных компонент. Если в ней не более шести вершин, то валентность любой из них не превосходит 5. В силу теоремы 12 можно считать, что граф является сферическим. Тогда справедлива формула Эйлера: $\mathbf{V} - \mathbf{E} + \mathbf{F} = 2$. Поскольку граф является простым, у нас не может быть граней с периметром 1 или 2. (Нужно еще учесть, что наш граф содержит более двух вершин, и потому он не относится к тем двум исключениям, о которых шла речь в доказательстве теоремы 17.) Поэтому периметр каждой из граней не меньше трех. Сумма периметров тогда не меньше $3\mathbf{F}$, однако мы знаем, что она равна $2\mathbf{E}$. Это приводит к неравенству $2\mathbf{E} \geq 3\mathbf{F}$, то есть $\mathbf{F} \leq 2\mathbf{E}/3$.

Теперь будем рассуждать от противного. Предположим, что валентность каждой вершины не меньше 6. Отмечая по 6 ориентированных ребер, исходящих из каждой вершины, мы отметим в итоге $6\mathbf{V}$ ребер. При этом каждое ориентированное ребро будет отмечено не более одного раза, откуда $6\mathbf{V} \leq 2\mathbf{E}$, то есть $\mathbf{V} \leq \mathbf{E}/3$.

Из неравенств $\mathbf{F} \leq 2\mathbf{E}/3$ и $\mathbf{V} \leq \mathbf{E}/3$ следует, что $\mathbf{V} - \mathbf{E} + \mathbf{F} \leq \mathbf{E}/3 - \mathbf{E} + 2\mathbf{E}/3 = 0$, что противоречит формуле Эйлера.

Отметим, что граф икосаэдра, являющийся сферическим, а потому и планарным, имеет вершины только валентности 5. Поэтому оценку из условия теоремы в этом смысле усилить нельзя.

16 Род графа

Вопрос о планарности графа может быть сформулирован также в форме, равен ли род данного графа нулю. Поэтому вопрос о нахождении рода графа является более общим, нежели вопрос о планарности. Мы хотим изложить сведения о роде полного графа. Для этого нам понадобится формула Эйлера для графов на поверхностях, являющихся сферами с g ручками. При этом нам будут нужны некоторые факты из топологии. Подробное изложение топологических аспектов выходит за рамки данного курса, поэтому иногда мы будем вынуждены ограничиваться иллюстративными соображениями.

Понятие плоского и сферического графа обобщается на случай сфер с ручками, однако если определение грани оставить прежним, то грани уже не будут, вообще говоря, гомеоморфны открытому диску. Но если граф рода g уложен без самопересечений на поверхности рода g (то есть на сфере с g ручками), то грани окажутся топологическими дисками. В противном случае оказалось бы, что у нас имеются "лишние" ручки. Строгое доказательство этого факта мы не даем, так как это требует средств, выходящих за рамки данного курса.

Итак, предположим, что все грани гомеоморфны открытым двумерным дискам. В этом случае формула Эйлера для поверхностей рода g имеет вид

$$\mathbf{V} - \mathbf{E} + \mathbf{F} = 2 - 2g.$$

Мы не даем строгого доказательства этого топологического факта, ограничившись лишь иллюстрацией того, почему добавление одной ручки уменьшает величину $\mathbf{V} - \mathbf{E} + \mathbf{F}$ на 2.

Пусть имеется граф на поверхности. Возьмем две вершины и добавим две маленькие петли с началом и концом в этих вершинах. Внутренние части этих петель удалим. Изготовим далее боковую поверхность цилиндра, взяв на основаниях цилиндра по точке. Соединим эти точки ребром. Если бы мы по этому ребру произвели разрез, то у нас получилась бы одна грань. Теперь присоединим основания цилиндра к имеющимся у нас двум отверстиям так, чтобы отмеченные на основаниях точки совпали с вершинами, а две окружности на границе цилиндрической поверхности совпали бы с нарисованными ранее петлями. В итоге мы получим граф на поверхности, у которой стало на одну ручку больше. Легко понять, что появилось три новых ребра и одна новая грань, а вершины остались прежними. Поэтому величина $\mathbf{V} - \mathbf{E} + \mathbf{F}$ уменьшилась на 2. Если мы присоединим g ручек к сфере, то $\mathbf{V} - \mathbf{E} + \mathbf{F}$ уменьшится на $2g$ и станет равной $2 - 2g$, что приводит к формуле Эйлера для графа заданного рода.

Теперь мы можем получить оценку снизу для рода полного графа.

Теорема 19 *Для рода полного графа K_n при $n \geq 3$ справедливо неравенство*

$$g(K_n) \geq \frac{(n-3)(n-4)}{12}.$$

Доказательство. При $n \leq 4$ граф K_n является планарным, поэтому его род равен нулю. При $n = 3$ и $n = 4$ это согласуется с формулой. При $n = 1$, $n = 2$ формула не верна. Причину этого мы обсудим ниже.

Предположим, что K_n при $n \geq 3$ имеет род g. Уложим K_n на сфере с g ручками без самопересечений. По формуле Эйлера $\mathbf{V} - \mathbf{E} + \mathbf{F} = 2 - 2g$. Ясно, что $\mathbf{V} = n$, $\mathbf{E} = n(n-1)/2$. Периметр каждой грани не меньше трех, поскольку граф не содержит петель и кратных ребер, а также не принадлежит к числу двух исключительных графов — K_1 и K_2 (вот почему было сказано, что $n \geq 3$). Сумма периметров всех граней, равная $2\mathbf{E}$, при этом не меньше $3\mathbf{F}$, откуда $\mathbf{F} \leq 2\mathbf{E}/3$. Следовательно, $2-2g = \mathbf{V}-\mathbf{E}+\mathbf{F} \leq \mathbf{V}-\mathbf{E}/3$, откуда $2g \geq \mathbf{E}/3-\mathbf{V}+2 = n(n-1)/6-n+2 = (n^2-7n+12)/6 = (n-3)(n-4)/6$. Разделив на 2 обе части неравенства, получим требуемое.

Теорема доказана.

По теореме 19 имеем, в частности, $g(K_5) \geq 1/12$, откуда $g(K_n) \geq 1$, то есть тем самым еще раз доказано, что граф K_5 не планарен. Для доказательства достаточно уложить K_5 без самопересечений на торе. Это легко сделать, если учесть, что граф K_5 можно нарисовать на плоскости всего лишь с одним самопересечением. Одной ручки достаточно, чтобы это самопересечение устранить. На самом деле на торе можно уложить даже граф K_7. Предложим два упражнения.

Задача 22 Привести пример укладки графа K_7 на торе.

Задача 23 Привести пример укладки графа $K_{4,4}$ на торе.

Из теоремы 19 следует, что граф K_8 уже нельзя уложить без самопересечений на торе, так как $g(K_8) \geq 5 \cdot 4/12 = 5/3$. Возникает вопрос, насколько точной является оценка из теоремы 19. Хотя сама теорема была доказана еще в XIX веке, точность этой оценки была установлена почти сто лет спустя, в 1968 году. Завершающий шаг сделали Рингель и Янгс. Таким образом, для рода полного графа имеет место формула

$$g(K_n) = \left]\frac{(n-3)(n-4)}{12}\right[,$$

где через $]x[$ обозначено наименьшее целое число, большее или равное x.

Говоря о роде графа, хотелось бы завершить этот раздел критерием планарности графа, что означает равенство рода графа нулю. Для начала обсудим, какие у нас уже имеются не планарные графы. Во-первых, это графы K_5 и $K_{3,3}$. Если мы разобьем ребра какого-либо не планарного графа на части, добавляя новые вершины валентности 2, а также если мы погрузим не планарный граф в бóльший, то получим граф, также не являющийся планарным. Это приводит нас к следующему понятию. Введем операцию удаления вершин валентности 2. Допустим, что $\rho(v) = 2$. Обозначим через e_1, e_2 ребра, исходящие из v. Сотрем вершину v, а ребра e_1, e_2 сольем в одно. Формально это означает, что мы удаляем вершину v и ребра $e_1^{\pm 1}$, $e_2^{\pm 1}$, добавляя новые ребра e, e^{-1} такие, что $\alpha(e) = \omega(e^{-1}) = \omega(e_1)$, $\omega(e) = \alpha(e^{-1}) = \omega(e_2)$.

Определение 14 Мы говорим, что граф Γ_1 *содержит* граф Γ_2, если Γ_2 можно получить из некоторого подграфа графа Γ_1 с помощью последовательных удалений вершин валентности 2.

Данное понятие является в некотором роде обобщением понятия подграфа. Поэтому иногда говорят, что Γ_2 — обобщенный подграф в Γ_1. Мы выяснили, что если граф содежит K_5 или $K_{3,3}$ в качестве обобщенного подграфа, то он не планарен. Оказывается, верно и обратное. В этом суть следующей теоремы Понтрягина – Куратовского, которую мы приводим без доказательства (по причине того, что оно является весьма сложным). Читатель может найти это доказательство в книге Харари [2].

Теорема 20 *Конечный граф является планарным тогда и только тогда, когда он не содержит граф K_5 или $K_{3,3}$ в качестве обобщенного подграфа.*

Рассмотрим в качестве примера граф Петерсена. Можно показать, что он содержит $K_{3,3}$ в качестве обобщенного подграфа. Известно также, что он не содержит K_5. В связи с этим примером можно привести еще одну версию теоремы Понтрягина – Куратовского. Рассмотрим операцию стягивания ребра в точку. Геометрически эта операция ясна, а формально она состоит в том, что ребро (вместе с обратным) удаляется, а его начало и конец отождествляются. Если граф Γ' можно получить из Γ с помощью последовательного применения таких операций, то говорят, что Γ *стягивается к* Γ'.

Теорема 21 *Конечный граф является планарным тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, стягиваемых к K_5 или $K_{3,3}$.*

В связи с этим уместно отметить, что граф Петерсена, очевидно, стягиваем к K_5.

17 Раскраска графов. Хроматическое число

Хотя имеется несколько разновидностей раскраски графов, мы будем в основном иметь дело с раскраской вершин графа в несколько цветов. Под этим мы понимаем, что вершинам графа ставятся в соответствие элементы некоторого множества, например, натуральные числа. Раскраска вершин графа называется *правильной*, если смежные вершины графа раскрашены в разные цвета. Граф, содержащий петли, вообще не допускает правильной раскраски. Поэтому можно считать, что имеется простой граф (кратные ребра ни на что здесь не влияют). Итак, пусть имеется конечный простой граф Γ. Для него существует наименьшее натуральное число k такое, что Γ допускает правильную раскраску в k цветов. Это число называется *хроматическим числом* графа и обозначается $\chi(\Gamma)$. Понятно, что это число всегда не превосходит числа вершин графа. Понятно также, что $\chi(K_n) = n$.

Если хроматическое число графа равно единице, то он не имеет ребер. Верно, конечно, и обратное. Опишем все графы, у которых хроматическое число равно двум.

Теорема 22 *Пусть Γ — простой конечный граф. Его хроматическое число не превосходит 2 тогда и только тогда, когда все замкнутые пути в графе Γ имеют четную длину.*

Доказательство. Предположим, что $\chi(\Gamma) \leq 2$. Если в графе имеется цикл нечетной длины $2n+1$, то первая вершина раскрашена в первый цвет, вторая — во второй, третья — снова в первый, четвертая — во второй и так далее. При этом $(2n+1)$-ая вершина имеет первый цвет, но она смежна первой, поэтому правильная раскраска в два цвета невозможна. Следовательно, циклов нечетной длины нет.

Теперь допустим, что все циклы графа имеют четную длину. Достаточно раскрасить в два цвета вершины каждой из компонент связности. Возьмем одну такую компоненту и зафиксируем в ней произвольную вершину u. Для любой вершины v выберем некоторый путь p_v из u в v. Если он имеет нечетную длину, то раскрасим вершину v в первый цвет, а если четную, то во второй. Покажем, что эта раскраска правильна. Рассмотрим произвольные смежные вершины v и w, соединенные ребром e. Путь $p_v e p_w^{-1}$ является циклом. Его длина $|p_v| + |p_w| + 1$ четна по условию. Поэтому числа $|p_v|$ и $|p_w|$ имеют разную четность. Следовательно, вершины v и w раскрашены в разные цвета.

Теорема доказана.

Из теоремы очевидным образом извлекается критерий того, что хроматическое число графа равно двум. Заметим также, что отсюда также следует критерий двудольности графа. Граф является двудольным тогда и только тогда, когда он содержит не менее двух вершин, и все замкнутые пути в нем имеют четную длину.

Задача 24 Найти хроматические числа графов правильных многогранников.

Вопрос о раскраске графов представляет, помимо прочего, интерес в в связи с раскраской географических карт. Пусть имеется обычная географическая карта. Требуется раскрасить страны в разные цвета так, чтобы пограничные страны оказались раскрашены в различные цвета. (Пограничными считаются страны, имеющие общий участок границы, не являющийся точкой. При этом мы также считаем, что отсутствуют анклавы, то есть части стран, полностью окруженные другими странами.)

Задачу о раскраске географической карты можно свести к задаче о правильной раскраске вершин некоторого вспомогательного графа. Укажем способ его построения. Внутри каждой из стран отметим по вершине (например, отметим столицу каждой из стран). Для каждого общего участка границы двух стран соединим их столицы вспомогательной линией, проходящей через этот участок. При этом можно добиться того, чтобы проведенные линии не пересекались (за исключением вершин). Две страны могут иметь несколько общих участков границы, поэтому столицы могут в результате быть соединены несколькими линиями. Выбранные нами вершины (столицы) и вспомогательные линии образуют вспомогательный граф, который, очевидно, является планарным. Поэтому для раскраски стран достаточно правильно раскрасить вершины получившегося вспомогательного графа.

Далее мы будем говорить о планарных графах. Хотя хроматическое число графа может принимать сколь угодно большое значение, для планарных графов имеет место ограничение.

Теорема 23 *Всякий простой конечный планарный граф допускает правильную раскраску вершин в 6 цветов.*

Доказательство. Пусть Γ — граф из условия задачи. Проведем индукцию по числу его вершин. Если оно не превосходит 6, то доказывать нечего. Пусть имеется не менее семи вершин. По теореме 18, в Γ имеется вершина v валентности не более 5. Удалим из Γ все ребра, инцидентные v, а затем и саму вершину v. Получим граф Γ' с меньшим числом вершин. По предположению индукции, его вершины можно правильно раскрасить в 6 цветов. Теперь вернемся к графу Γ, перенося на него цвета всех вершин из Γ'. Вершина v смежна не более чем пяти вершинам из Γ'. Один из шести цветов заведомо не присутствует среди цветов вершин, смежных v. В этот цвет вершину v и раскрасим. Получим правильную раскраску для графа Γ.

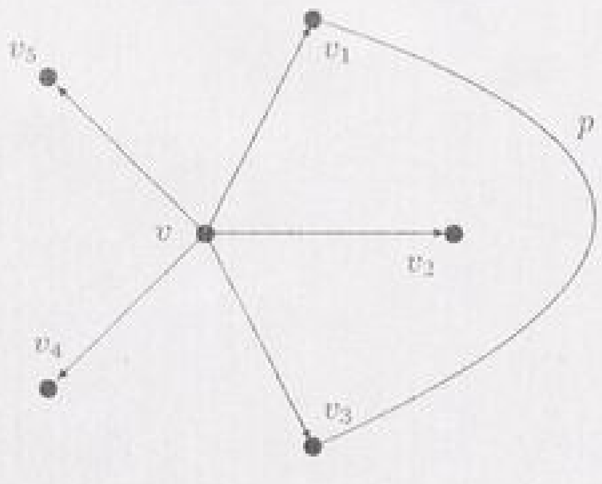
Теорема доказана.

Теорему 23 можно усилить. На самом деле достаточно и пяти цветов.

Теорема 24 *Всякий простой конечный планарный граф допускает правильную раскраску вершин в 5 цветов.*

Доказательство. Как и выше, применяем индукцию по числу вершин графа Γ. Утверждение очевидно, если число вершин графа не больше пяти. Вновь используя теорему 18, найдем в Γ вершину v валентности не более 5. Пусть Γ', как и выше, есть подграф в Γ, получаемый удалением из Γ всех ребер, инцидентных v, а также самой вершины v. По предположению индукции, можно правильно раскрасить вершины графа Γ' в 5 цветов. Если $\rho(v) < 5$, то вершину v можно будет окрасить в один из пяти цветов, не встречающихся среди цветов вершин, смежных v. Поэтому будем считать, что $\rho(v) = 5$, и все вершины, смежные v, окрашены в разные цвета.

Изобразим граф Γ на плоскости. Обходя вершину v по часовой стрелке, обозначим исходящие из нее ребра через e_i, их концевые вершины через v_i, считая, что v_i окрашена в i-й цвет.



Через H_{ij}, где $1 \leq i < j \leq 5$, обозначим подграф в Γ', образованный всеми вершинами, раскрашенными в цвета с номерами i, j, а также всеми ребрами, соединяющими такие вершины. Рассмотрим граф H_{13}. Вообще говоря, он имеет несколько связных компонент. Разберем два случая.

1) Вершины v_1 и v_3 принадлежат разным компонентам связности графа H_{13}. Мы можем перекрасить одновременно все вершины одной из связных компонент графа H_{13}, заменяя первый цвет на третий и наоборот. При этом раскраска остается правильной. Сделаем это с компонентой, содержащей вершину v_3. Тогда вершина v_3 окажется раскрашена в первый цвет. Тогда достаточно окрасить вершину v в третий цвет, и правильная раскраска для Γ будет получена.

2) Пусть теперь вершины v_1 и v_3 принадлежат одной и той же компоненте связности графа H_{13}. Тогда их можно соединить путем p в этом графе (см. рисунок). Если мы теперь проделаем те же рассуждения относительно H_{24} вместо H_{13}, то можно также считать, что вершины v_2 и v_4 соединены в H_{24} некоторым путем q. Путь $e_1pe_3^{-1}$ является простым замкнутым путем на плоскости. Он делит плоскость на две области. Вершины v_2 и v_4 принадлежат при этом разным областям. Поэтому любой путь, их соединяющий, в частности, путь q, должен пересекать путь $e_1pe_3^{-1}$. Это пересечение происходит в одной из вершин графа Γ'. Следовательно, точка пересечения будет принадлежать как q, так и p. Но это невозможно, так как все вершины пути p имеют цвет 1 или 3, а все вершины пути q имеют цвет 2 или 4.

Теорема доказана.

Долгое время оставался открытым вопрос о том, нельзя ли число цветов, необходимых для раскраски планарного графа, уменьшить до четырех. В этом состояла знаменитая *проблема четырех красок*. В конце 70-х годов она, наконец, была решена положительно. При этом проблема была сведена к перебору конечного числа случаев. Этот перебор был осуществлен с использованием компьютера. В дальнейшем доказательство много раз упрощалось, но оно до сих пор остается весьма сложным.

18 Хроматический многочлен

Пусть имеется простой конечный граф Γ. Для каждого $k \geq 1$ рассмотрим число способов правильной раскраски вершин графа Γ в k цветов. Обозначим это число через $P_\Gamma(k)$. Цель данного раздела — научиться вычислять $P_\Gamma(k)$.

Для начала рассмотрим случай полного графа K_n. Можно считать, что его вершины имеют номера от 1 до n. Первую вершину можно раскрасить в любой из k цветов. Вторую вершину, если первая уже раскрашена, можно раскрасить в $k-1$ цвет и так далее. Поэтому мы имеем произведение n сомножителей $k(k-1)(k-2)\dots(k-(n-1))$, которое и дает искомое число способов. (Если $k < n$, то это число равно нулю.) Заметим, что это выражение представляет собой многочлен n-й степени от переменной k.

Пусть имеется граф, не являющийся связным. Найдем количество способов правильной раскраски вершин в k цветов для каждой из связных компонент. Из соображений элементарной комбинат ›ики ясно, что для всего графа число способов раскраски будет произведением нз. денных чисел для компонент. Поэтому задача сводится к случаю связного графа.

Пусть имеется граф Г, не являющийся полным. Тогда некоторые две его вершины v и w можно соединить ребром. Соединим их, получая граф Γ_1. Далее определим граф Γ_2. Он получается из Г таким образом. Вначале вершины v и w отождествим (склеим). При этом не возникает петель, так как v и w не были соединены ребром. Но могут возникать кратные ребра, так как одна и та же вершина могла быть соединена как с v, так и с w. Если кратные ребра возникают, то для каждой пары вершин, соединенных несколькими ребрами, оставим только одно из них (речь идет, разумеется, о неориентированных ребрах). Имеет место следующее утверждение.

Теорема 25

$$P_\Gamma(k) = P_{\Gamma_1}(k) + P_{\Gamma_2}(k).$$

Доказательство является неожиданно простым. При раскраске вершин графа Г в k цветов (здесь и далее раскраски правильные) могут возникнуть два случая: вершины v и w могут приобрести либо разный цвет, либо одинаковый. В первом случае способов раскраски столько же, сколько их имеется для графа, в котором v и w соединены ребром, то есть для Γ_1. А во втором случае каждой правильной раскраске графа Г соответствует таковая раскраска для Γ_2 и наоборот (по раскраске одного из этих графов однозначно восстанавливается раскраска другого). Отсюда следует доказываемое равенство.

Теорема 25 позволяет свести задачу вычисления $P_\Gamma(k)$ для двух новых графов, второй из которых содержит на одну вершину меньше исходного, а первый содержит столько же вершин, сколько и исходный, но он на одно ребро становится "ближе" к полному графу. Теперь можно провести индукцию по числу вершин графа, а при фиксированном числе вершин — по числу ребер, недостающих до полного графа с теми же вершинами. Рассуждая таким образом, мы с использованием теоремы 25 легко можем доказать, что для любого простого конечного графа Г с n вершинами выражение $P_\Gamma(k)$ представляет собой многочлен от k степени n со старшим коэффициентом 1. Это так для полных графов, как было установлено выше. Если Г не полный, то построим графы Γ_1 и Γ_2. По теореме 25, $P_\Gamma(k)$ есть сумма двух слагаемых. Второе из них есть многочлен степени $n-1$ по предположению индукции. По той же причине первое слагаемое есть многочлен от k степени n со старшим коэффициентом 1. Этим же свойством обладает потому и $P_\Gamma(k)$.

Таким образом, мы вправе назвать $P_\Gamma(k)$ *хроматическим многочленом* графа Г. Если известен хроматический многочлен графа, то наименьшее натуральное число k, не являющееся его корнем, будет хроматическим числом данного графа.

Задача 25 Доказать, что хроматический многочлен дерева с n вершинами равен $k(k-1)^{n-1}$.

19 Теорема Холла и ее приложения

Рассмотрим следующую задачу о паросочетаниях. Пусть имеется m юношей и n девушек. Некоторые из них знакомы между собой. Требуется каждому юноше подобрать в пару какую-либо знакомую ему девушку. При этом разным юношам должны соответствовать разные девушки.

Задача о паросочетаниях имеет решение далеко не всегда. Отметим очевидное необходимое условие. Допустим, что паросочетание возможно. Рассмотрим произвольных k юношей ($1 \leq k \leq m$). Очевидно, что они в совокупности знакомы не менее, чем с k девушками (в том смысле, что общее число девушек, которые знакомы хотя бы с одним из k юношей, не меньше k). Оказывается, сформулированное условие является и достаточным. В этом суть теоремы Холла о паросочетаниях, доказанной в 30-х годах Филипом Холлом (P. Hall). Мы сформулируем эту теорему на языке бинарных соответствий.

Напомним, что бинарным соответствием ρ между множеством A и множеством B называется произвольное подмножество декартова произведения $A \times B$. Всякое бинарное соответствие можно изобразить в виде двудольного графа. Считая, что A и B не пересекаются, возьмем объединение $A \cup B$ в качестве множества вершин графа. Вершину $a \in A$ соединяем дугой с вершиной $b \in B$ в том и только в том случае, когда упорядоченная пара (a, b) принадлежит ρ. В нашем случае A есть множество юношей, B — множество девушек, а ρ — отношение знакомства, то есть ρ состоит из всех пар вида (a, b), где юноша $a \in A$ знаком с девушкой $b \in B$.

Если дано соответствие $\rho \subseteq A \times B$, то для любого подмножества $X \subseteq A$ можно определить его образ $\rho(X)$ относительно ρ. По определению, $\rho(X)$ состоит из всех $b \in B$, для которых найдется элемент $a \in X$ такой, что $(a, b) \in \rho$. В нашей интерпретации, если X есть некоторая компания юношей, то $\rho(X)$ будет состоять как раз из всех девушек, которые знакомы хотя бы с одним из юношей этой компании.

Здесь и далее мы будем количество элементов множества Y обозначать через $|Y|$. Необходимое условие возможности паросочетания (в дальнейшем будем называть его *условием Холла*) состоит в том, что для любого $X \subseteq A$ имеет место неравенство $|\rho(X)| \geq |X|$. (Точнее было бы здесь говорить об условии Холла для A.) Наличие паросочетания означает просто существование инъективного отображения f из A в B. При этом каждый юноша должен получить в пару знакомую ему девушку. Это означает, что если $b = f(a)$, то $(a, b) \in \rho$. Поскольку отображение $f\colon A \to B$ с формальной точки зрения само является бинарным соответствием между A и B (оно состоит из всех пар вида (a, b), где $a \in A$, $b \in B$, $f(a) = b$), то предыдущее высказывание на самом деле просто означает, что f содержится в ρ, то есть $f \subseteq \rho$. Итак, вот формулировка теоремы Холла.

Теорема 26 *Пусть A, B — конечные множества, $\rho \subseteq A \times B$. Предположим, что для любого $X \subseteq A$ справедливо неравенство $|\rho(X)| \geq |X|$. Тогда существует инъективное отображение f из A в B такое, что $f \subseteq \rho$.*

Доказательство. При доказательстве нам удобнее пользоваться менее абстрактным языком, поэтому еще раз сформулируем утверждение, которое мы хотим доказать. Имеется m юношей и n девушек. Известно, что любые k из этих m юношей ($1 \leq k \leq m$) знакомы в совокупности не менее, чем с k девушками. Тогда каждому юноше можно подобрать знакомую му девушку в качестве пары так, что разным юношам соответствуют разные девушки.

Мы будем доказывать утверждение индукцией по числу юношей. Доказывая утверждение для числа юношей, равного m, мы можем принять предположение индукции, состоящее в том, что для компании из меньшего числа юношей наше утверждение справедливо. Рассмотрим два случая.

1) Предположим, что условие Холла выполнено "с запасом", то есть для любых k юношей, где $1 \leq k < m$, общее число девушек, знакомых хотя бы с одним из этих k юношей, составляет не менее $k + 1$. В этом случае мы можем взять любого юношу и сопоставить ему в качестве пары любую знакомую ему девушку (такая, разумеется найдется ввиду условия Холла при $k = 1$). Если $m = 1$, то паросочетание имеется. Если $m > 1$, то рассмотрим оставшихся $m - 1$ юношей и $n - 1$ девушек. С учетом предположения индукции достаточно проверить, что условие Холла для этих $m-1$ юношей выполнено. Для этого надо взять произвольные k из этих юношей ($1 \leq k \leq m - 1$). В нашем случае у всех этих юношей вместе имеется по крайней мере $k + 1$ знакомая девушка среди всех n девушек, поэтому среди оставшихся $n - 1$ девушек у них в совокупности не менее k знакомых. А это и значит, что условие Холла для $m - 1$ юношей выполнено. Таким образом, каждому из них мы находим знакомую девушку в качестве пары, и вместе с парой, образованной в самом начале, мы получаем искомое паросочетание.

2) Теперь предположим, что ситуация из предыдущего абзаца не имеет места. Это значит, что найдутся s юношей ($1 \leq s < m$), которые в совокупности знакомы ровно с s девушками. Ясно, что если паросочетание вообще возможно, то данные s юношей должны будут сочетаться в пары как раз с этими s девушками. Поэтому покажем вначале, что между ними возможно паросочетание. Поскольку $s < m$, достаточно проверить условие Холла для взятых s юношей. Чтобы сделать это, возьмем любые k из s юношей. Из условия Холла для m юношей мы знаем, что среди всех n девушек у них имеется не менее k знакомых. Нас же сейчас интересует, сколько у взятых k юношей будет знакомых среди s девушек. Легко понять, что их будет столько же, так как из оставшихся $n - s$ девушек ни одна не знакома ни с одним из наших s юношей (напомним, что s девушек — это все знакомые для s юношей). Итак, условие Холла выполнено, и s юношей благополучно сочетаются в пары с s девушками.

Теперь осталось сделать то же самое для оставшихся $m - s$ юношей и $n - s$ девушек. Так как $m - s < m$, то для применения индукционного предположения достаточно показать, что для этих $m - s$ юношей выполнено условие Холла. Как обычно, выберем каких-либо k юношей из $m - s$ ($1 \leq k \leq m - s$). Рассмотрим компанию из этих k юношей вместе с s юношами, уже участвовавшими в паросочетании. Всего получим $k + s$ из m юношей. Поскольку для m юношей условие Холла имеет место, найдутся $k+s$ девушек, в совокупности знакомых с этими $k+s$ юношей. Среди этих девушек не более s уже участвовали в паросочетаниях, поэтому останется не менее k. Из этих k (или более) девушек каждая знакома хотя бы с одним из $k+s$ юношей. Но те девушки, которые знакомы хотя бы с одним из s юношей, входят в число s девушек, уже участвовавших в паросочетаниях. Следовательно, каждая из этих k (или более) девушек знакома с одним из выбранных k юношей. Но это как раз значит, что k юношей (из числа $m-s$) имеют не менее k знакомых девушек (из числа $n-s$). Итак, для $m-s$ юношей выполнено условие Холла, и потому каждому юноше можно сопоставить знакомую девушку из числа $n-s$. Мы получим $m-s$ новых пар, которые вместе с s парами, образованными ранее, дают искомое паросочетание.

Теорема полностью доказана.

Предложим в качестве задачи доказать некоторое утверждение, которое, по сути, равносильно теореме Холла.

Задача 26 Дано семейство конечных множеств S_1, S_2, …, S_m. Назовем трансверсалью такое множество $T = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ из m элементов, что $x_i \in S_i$ для всех i от 1 до m. Вывести из теоремы Холла, что данное семейство обладает трансверсалью тогда и только тогда, когда объединение любых k множеств этого семейства содержит по крайней мере k элементов.

Теорема Холла имеет многочисленные обобщения и приложения. В качестве примера одного из обобщений рассмотрим так называемую “задачу о гареме”. Предположим, что имеется m юношей и n девушек, некоторые из которых знакомы между собой. Требуется каждому из юношей поставить в соответствие двух знакомых девушек. При этом ни одна из девушек не должна быть поставлена в соответствие более, чем одному из юношей. Чтобы эта задача имела решение, необходимо, чтобы любые k юношей имели в совокупности не менее $2k$ знакомых девушек. Из теоремы Холла следует, что это условие является достаточным. Для доказательства достаточно рассмотреть по два экземпляра каждого из юношей. При этом каждый из “экземпляров” знаком с теми же самыми девушками, с которыми он был знаком до “раздвоения”. Нужно проверить, что для новой компании выполнено условие теоремы Холла. Возьмем k новых юношей. Поскольку каждый из юношей теперь присутствует в двух экземплярах, среди них найдется $s \geq k/2$ различных экземпляров. По условию они в совокупности знакомы не менее, чем с $2s \geq k$ девушками, что и требовалось. Совершим паросочетание, а затем заменим два одинаковых “экземпляра” на одного юношу. Ему будет соответствовать две девушки, и все условия при этом выполнены.

В качестве приложения теоремы Холла рассмотрим вопрос о латинских прямоугольниках и квадратах. Рассмотрим матрицу A размером $m \times n$, где $m \leq n$. Пусть каждая из ее m строк заполнена числами от 1 до n. Если числа, стоящие в одной строке, попарно различны, и то же верно для столбцов, то полученная таблица называется *латинским прямоугольником*. Если $m = n$, то она называется *латинским квадратом*.

Теорема 27 *Всякий латинский прямоугольник можно дополнить до латинского квадрата.*

Доказательство. Достаточно доказать, что любой латинский прямоугольник $m \times n$, где $m < n$, можно дополнить одной строкой до латинского прямоугольника размером $(m+1) \times n$. Чтобы применить теорему Холла, опишем "юношей", "девушек" и отношение "знакомства" для этой ситуации. Объявим "юношами" элементы $(m+1)$-й строки, которую необходимо заполнить. При этом имеется n "юношей", которых можно занумеровать числами от 1 до n. "Девушками" будут числа от 1 до n. Мы считаем, что i-й юноша знаком с девушкой j, если число j отсутствует в i-м столбце матрицы. Рассмотрим произвольную компанию из k юношей ($1 \leq k \leq n$), то есть зафиксируем k столбцов. В каждом из столбцов находится m чисел, поэтому ровно $n - m$ чисел в столбце отсутствует. (В этом смысле каждый юноша знаком ровно с $n - m$ девушками.) Для каждого из k столбцов выпишем $n - m$ чисел, которых в этом столбце нет. Всего будет выписано $k(n - m)$ чисел. (Разумеется, среди выписанных чисел могут быть повторения.) Возникает вопрос: сколько имеется различных чисел среди выписанных? Для этого ответим на вопрос, сколько раз одно и то же число может повторяться в списке. Это число встречается ровно по разу в каждой из m строк. Получаем m одинаковых чисел, которые стоят в различных столбцах. Ясно, что при этом есть ровно $n - m$ столбцов, в которых наше число отсутствует. Именно столько раз число встретится в списке. (Это на самом деле означает, что каждая девушка знакома ровно с $n - m$ юношами.) Итак, нами выписано $k(n - m)$ чисел (с повторениями), и каждое число встречается $n - m$ раз. Это значит, что среди выписанных чисел имеется k различных. Таким образом, k юношей из нашей компании знакомы в совокупности с k девушками. По теореме Холла существует паросочетание, а это как раз и есть заполнение $(m+1)$-й строки, при котором возникает латинский прямоугольник.

Теорема доказана.

В связи с доказательством теоремы 27 можно рассмотреть такую задачу.

Задача 27 *На балу присутствуют юноши и девушки. Каждый юноша знаком ровно с m девушками, а каждая девушка знакома ровно с m юношами. Доказать, что юноши могут одновременно пригласить на танец девушек таким образом, что каждый будет танцевать со своей знакомой.*

Список литературы

[1] Р. Уилсон. Введение в теорию графов. М., Мир, 1977.

[2] Ф. Харари. Теория графов. М., Мир, 1973.

[3] J.-P. Serre. Trees. Springer-Verlag, 1980.